Lösungen zum Ergänzungsblatt 15

Vorbereitungsaufgaben

Keine Vorbereitungsaufgaben.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Für Alphabete Σ und Γ nennen wir $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ einen *Homomorphismus*, wenn gilt:

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \forall x, y \in \Sigma^*\colon \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Dann gilt $\varphi(a_1 \dots a_n) = \varphi(a_1) \dots \varphi(a_n)$ für alle $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$.

1. Seien Σ und Γ zwei Alphabete und $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus. Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige reguläre Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$?

   (a) $\varphi(A)$ ist regulär.
   (b) $\varphi^{-1}(B)$ ist regulär.
   (c) $B \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(B))$.
   (d) $\varphi(\varphi^{-1}(B)) \subseteq B$.
   (e) $A \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(A))$.
   (f) $\varphi^{-1}(\varphi(A)) \subseteq A$.

2. Für ein $m \geq 1$ sei $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ ein m-elementiges Alphabet und L die Sprache

   $$L = \left\{ a_1^n a_2^{n^2} a_3^{n^3} \dots a_m^{n^m} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

   über Σ. Zeigen Sie, dass L genau dann regulär ist, wenn $m = 1$ gilt.

3. Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie, dass

   $$L' = \{ucv \mid uv \in L\}$$

   über dem Alphabet $\Sigma' = \{a, b, c\}$ ebenfalls regulär ist.

Lösung

1. (a) Richtig. Wurde in Übungsblatt 4, Aufgabe 3 bewiesen.

   (b) Richtig. Wurde in Übungsblatt 6, Aufgabe 4 bewiesen.

   (c) Falsch. Als Gegenbeipsiel kann man eine Menge B wählen, in der ein Element kein Urbild bezüglich φ besitzt. Für $\Sigma = \Gamma = \{a\}$ ist $\varphi(w) = \varepsilon$ ein Homomorphismus und $B = \{a\}$ regulär, aber es gilt $\varphi(\varphi^{-1}(B)) = \emptyset$, was keine Obermenge von B ist.

   (d) Richtig. Sei $w \in \varphi(\varphi^{-1}(B))$ beliebig. Dann existiert ein $x \in \varphi^{-1}(B)$ mit $\varphi(x) = w$. Aus $x \in \varphi^{-1}(B)$ folgt $\varphi(x) \in B$ und somit $w \in B$.

   (e) Richtig. Sei $w \in A$ beliebig. Dann ist $\varphi(w) \in \varphi(A)$ und somit $w \in \varphi^{-1}(\varphi(A))$.

   (f) Falsch. Als Gegenbeispiel kann man ein Element aus Γ^* mit mehr als einem Urbild nehmen und die Menge A so wählen, dass sie nur einige Urbilder enthält. Für $\Sigma = \Gamma = \{a\}$ ist $\varphi(w) = \varepsilon$ ein Homomorphismus und $A = \{\varepsilon\}$ regulär, aber es gilt $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = \Sigma^*$, was keine Teilmenge von A ist.

   Hinweise:

   - Für das Bild $\varphi(A)$ von A unter φ und das Urbild $\varphi^{-1}(B)$ von B unter φ gilt

     $$\varphi(A) = \{\varphi(x) \in B \mid x \in A\} \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi^{-1}(B) = \{x \in A \mid \varphi(x) \in B\}\,.$$

   - Man beachte, dass die Aussagen 4 und 5 für eine beliebige Funktion $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ und für beliebige Mengen $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$ gelten. Dass φ ein Homomorphismus ist oder dass A und B regulär sind, wurde in den Beweisen nicht verwendet.

2. Für $m = 1$ ist $\Sigma = \{a_1\}$ und $L = \{a_1^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \Sigma^*$ offensichtlich regulär. Die Gegenrichtung zeigen wir, indem wir per Widerspruch beweisen, dass L für kein $m > 1$ regulär ist. Sei hierfür $m > 1$ beliebig. Betrachte den Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma^* \to \{a\}^*$, der durch

   $$\varphi(a_i) = \begin{cases} a & \text{für } i = 2 \\ \varepsilon & \text{für } i \neq 2 \end{cases}$$

   definiert ist. Wäre L regulär, so wäre auch

   $$\varphi(L) = \left\{a^{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

   regulär, was bekanntlich nicht stimmt.

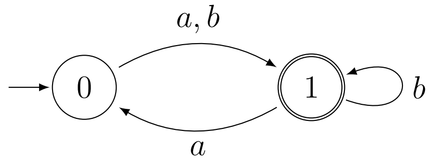
3. Betrachte den Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma'^* \to \Sigma^*$, der durch $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$ und $\varphi(c) = \varepsilon$ definiert ist. Dann gilt:

   $$L' = \Sigma^*\{c\}\Sigma^* \cap \varphi^{-1}(L).$$

   Da Σ^*, $\{c\}$ und L regulär sind und die Klasse der regulären Sprachen unter Konkatenation, Schnitt und inversen Homomorphismen abgeschlossen ist, ist auch L' regulär.

Präsenzaufgabe 2

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und M der folgende DEA über Σ:



Mit L bezeichnen wir die von M akzeptierte Sprache. Wie üblich seien R_L die Myhill-Nerode Relation und $\equiv_L$ die syntaktische Kongruenz bezüglich L.

1. Geben Sie eine möglichst einfache Mengendarstellung für L an.
2. Geben Sie für jede Klasse in
   (a) Σ^*/R_L
   (b) $\Sigma^*/{\equiv_L}$

   den längen-lexikographisch kleinsten Vertreter an.
3. Geben Sie die Verknüpfungstafel von $\mathrm{Synt}(L)$ an.
4. Ist $\mathrm{Synt}(L)$ kommutativ?
5. Ist $\mathrm{Synt}(L)$ eine Gruppe?

Lösung

1. $L = \{wa^n \mid n \text{ ist gerade und } w \text{ endet mit } b \text{ oder } n \text{ ist ungerade und } w \text{ leer}\}$
2. (a) ε, a.
   (b) ε, a, b, ba.
3. Für die Verknüpfungstafel schreiben wir der Übersichtlichkeit halber vereinfacht nur w statt $[w]_{\equiv_L}$, d. h. wir rechnen mit Vertretern:

$\cdot$	ε	a	b	ba
ε	ε	a	b	ba
a	a	ε	b	ba
b	b	ba	b	ba
ba	ba	b	b	ba

4. $\mathrm{Synt}(L)$ ist nicht kommutativ, da beispielsweise gilt:
$$[a]_{\equiv_L} \cdot [b]_{\equiv_L} = [b]_{\equiv_L} \neq [ba]_{\equiv_L} = [b]_{\equiv_L} \cdot [a]_{\equiv_L}.$$
5. $\mathrm{Synt}(L)$ ist keine Gruppe, da weder $[b]_{\equiv_L}$ noch $[ba]_{\equiv_L}$ ein Inverses besitzen.

Präsenzaufgabe 3

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b = \min\{|w|_a, |w|_c\}\}$$

nicht kontextfrei ist.

Lösung

Wir zeigen mit dem Pumping-Lemma, dass L nicht kontextfrei ist. Sei hierfür $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $z = a^n b^n c^n$. Dann gilt $z \in L$ und $|z| = 3n \geq n$. Seien $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $z = uvwxy$, $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$. Zu zeigen ist, dass ein $i \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $z' = uv^i wx^i y$ nicht in L liegt.

<u>Fall 1: vx enthält ein b</u>

Wegen $|vwx| \leq n$ enthält vx kein a oder kein c. Dann gilt für $i = 2$:

$$|z'|_b > |z|_b = \min\{|z|_a, |z|_c\} = \min\{|z'|_a, |z'|_c\}.$$

<u>Fall 2: vx enthält kein b</u>

Wegen $|vx| \geq 1$ enthält vx mindestens ein a oder ein c, aber wegen $|vwx| \leq n$ nicht beides. Dann gilt für $i = 0$:

$$|z'|_b = |z|_b = \min\{|z|_a, |z|_c\} > \min\{|z'|_a, |z'|_c\}.$$

In beiden Fällen existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $uv^i wx^i y \notin L$. □

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Sei $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik mit folgenden Produktionen:

$$\begin{aligned} S &\to A \mid ba \\ A &\to BA \mid a \\ B &\to BA \mid b. \end{aligned}$$

Geben Sie eine zu G äquivalente Grammatik G' in Greibach-Normalform an.

Lösung

Wir fahren fort wie auf den Vorlesungsfolien 21.1 bis 21.4 beschrieben.

<u>Schritt 1</u> (erster Algorithmus)

Mit dem ersten Algorithmus werden Regeln der Form $A_i \to A_j\alpha$ mit $i \geq j$ entfernt. Wir wählen die Nummerierung $(A_1, A_2, A_3) = (S, A, B)$, damit die Anzahl solcher Produktionen minimal ist, und erhalten durch Umbenennung die Produktionen

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_2 \mid ba \\ A_2 &\to A_3A_2 \mid a \\ A_3 &\to A_3A_2 \mid b. \end{aligned}$$

Für $i = 1$ passiert nichts, da keine Regeln der Form $A_1 \to A_1\alpha$ existieren. Für $i = 2$ passiert ebenfalls nichts, da keine Regeln der Formen $A_2 \to A_1\alpha$ oder $A_2 \to A_2\alpha$ existieren. Für $i = 3$ verändert sich die Regelmenge erst bei der Entfernung der Linksrekursion bzgl. A_3. Durch die Entfernung von $A_3 \to A_3A_2$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_2 \mid ba \\ A_2 &\to A_3A_2 \mid a \\ A_3 &\to b \mid bB \\ B &\to A_2 \mid A_2B. \end{aligned}$$

<u>Schritt 2</u> (zweiter Algorithmus)

Der zweite Algorithmus liefert:

$$\begin{aligned} A_1 &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \mid ba \\ A_2 &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \\ A_3 &\to b \mid bB \\ B &\to A_2 \mid A_2B. \end{aligned}$$

<u>Schritt 3</u> (B-Regeln)

Die rechten Seiten der B-Regeln beginnen mit A_2. Durch das Einsetzen von $A_2 \to bA_2 \mid bBA_2 \mid a$ in $B \to A_2 \mid A_2B$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_1 &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \mid ba \\ A_2 &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \\ A_3 &\to b \mid bB \\ B &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \mid bA_2B \mid bBA_2B \mid aB. \end{aligned}$$

<u>Schritt 4</u> (Pseudoterminale)

Durch das Einführen von Pseudoterminal V_a erhalten wir die gewünschte Regelmenge P':

$$\begin{aligned}
A_1 &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \mid bV_a \\
A_2 &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \\
A_3 &\to b \mid bB \\
B &\to bA_2 \mid bBA_2 \mid a \mid bA_2B \mid bBA_2B \mid aB \\
V_a &\to a.
\end{aligned}$$

Ein Pseudoterminal V_b ist in diesem Fall nicht nötig.

Dann ist $G' = (\{A_1, A_2, A_3, B, V_a\}, \{a, b\}, P', A_1)$ eine zu G äquivalente Grammatik in Greibach-Normalform.

Hinweis: Alternativ kann man „durch scharfes Hinsehen“ erkennen, dass G genau die Sprache $L = L(a|b(a|b)^*a)$ erzeugt, und eine Grammatik für L in Greibach-Normalform konstruieren. Eine solche Grammatik wäre $G' = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit Produktionen

$$\begin{aligned}
S &\to a \mid bT \\
T &\to aT \mid bT \mid a.
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Für Wörter $v, w \in \Sigma^*$ sei $|w|_v$ die Anzahl an Vorkommnissen von v in w (z. B. $|aabaaa|_{aa} = 3$ und $|ababa|_{aba} = 2$). Welche der folgenden Sprachen sind regulär und welche nicht?

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
2. $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{ab} = |w|_{ba}\}$
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{aba} = |w|_{bab}\}$

Beweisen Sie Ihre Antworten, ohne das Pumping-Lemma oder den Satz von Myhill-Nerode zu verwenden.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Lösung

1. L_1 ist nicht regulär.

   Angenommen, L_1 wäre regulär. Dann wäre auch $L_1 \cap L(a^*b^*) = L$ regulär, was ein Widerspruch wäre. □

2. L_2 ist regulär.

   L_2 enthält genau die Wörter, die mit demselben Buchstaben beginnen und enden. Somit wird L_2 von dem regulären Ausdruck $\gamma = a(a|b)^*a|b(a|b)^*b$ beschrieben. □

3. L_3 ist nicht regulär.

   Angenommen, L_3 wäre regulär. Betrachte den Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, der durch $\varphi(a) = aba$ und $\varphi(b) = bab$ definiert ist. Dann wäre auch

   $$\varphi^{-1}(L_3 \cap L((aba)^*(bab)^*)) = \varphi^{-1}(\{(aba)^n(bab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}) = L$$

   regulär, was ein Widerspruch wäre. $\square$

   Bemerkung: Diese Argumentation funktioniert wegen $|(aba)^m(bab)^n|_{aba} = m+1$ und $|(aba)^m(bab)^n|_{bab} = n+1$, d. h. es gilt:

   $$|(aba)^m(bab)^n|_{aba} = |(aba)^m(bab)^n|_{bab} \iff m = n.$$

   Bei Teilaufgabe 2 funktioniert diese Argumentation nicht, da

   $$|(ab)^m(ba)^n|_{ab} = |(ab)^m(ba)^n|_{ba} = m + n - 1$$

   gilt. In diesem Fall ist der Schnitt von L_2 und $L((ab)^*(ba)^*)$ nicht $\{(ab)^n(ba)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, sondern $L((ab)^*(ba)^*)$ selbst.

Zusatzaufgabe 3

Lösen Sie die komplette Modulprüfung aus Sommersemester 2018.

Lösung

Siehe Ergänzungswebseite in der Rubrik *Zusatzmaterialien.*