Lösungen zum Ergänzungsblatt 12

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Seien $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik in Kuroda-Normalform und

$$P' = P \cup \{(CaB, aBCbAB)\}.$$

Geben Sie eine zu $G' = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P', S)$ äquivalente Grammatik G'' in Kuroda-Normalform an. Gehen Sie wie in den Vorlesungsfolien 34.2 und 34.3 beschrieben vor.

Lösung

$G'' = (\{S, A, B, C, D, E, F, G, V_a, V_b\}, \{a, b\}, P'', S)$ mit

$$P'' = P \cup \{(V_a, a), (V_b, b), (CV_a, V_aD), (DB, BE), (E, CF), (F, V_bG), (G, AB)\}.$$

Herleitung:

1. Verwende Pseudoterminale für a und b, d. h. ersetze die Produktion $CaB \to aBCbAB$ durch $CV_aB \to V_aBCV_bAB$, $V_a \to a$ und $V_b \to b$.
2. Ersetze $CV_aB \to V_aBCV_bAB$ durch $CV_a \to V_aD$ und $DB \to BCV_bAB$.
3. Ersetze $DB \to BCV_bAB$ durch $DB \to BE$ und $E \to CV_bAB$.
4. Ersetze $E \to CV_bAB$ durch $E \to CF$ und $F \to V_bAB$.
5. Ersetze $F \to V_bAB$ durch $F \to V_bG$ und $G \to AB$.

Vorbereitungsaufgabe 2

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, 0, \square, F)$ die DTM aus Ergänzungsblatt 11, Präsenzaufgabe 3. Ziel dieser Aufgabe ist es, M zu formalisieren und wichtige Konzepte anhand von M zu illustrieren.

1. Geben Sie die Mengen Q, Σ, Γ und F konkret an und stellen Sie die Überführungsfunktion δ als Tabelle

q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$	$\delta(q,\Box)$
0			
1			
2			
3			
4			
5			

   dar, indem Sie diese mit Tripeln aus $Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ ausfüllen.

2. Was ist die von M akzeptierte Sprache $T(M)$?

3. Geben Sie eine akzeptierende Konfigurationsfolge für das Eingabewort aba an.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Musterlösung der Präsenzaufgabe 3 vom Ergänzungsblatt 11 nach der Ergänzung leicht geändert wurde.

Lösung

1. $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, 0, \Box, F)$ mit $Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \Box\}$, $F = \{5\}$ und $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ mit

q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$	$\delta(q,\Box)$
0	$(0,a,R)$	$(1,a,R)$	$(4,\Box,L)$
1	$(2,b,L)$	$(1,b,R)$	$(3,\Box,L)$
2	$(0,a,R)$	$(2,b,L)$	
3	$(4,b,L)$	$(3,b,L)$	
4	$(4,a,L)$	$(4,b,L)$	$(5,\Box,R)$
5			

   Da δ eine Funktion ist, muss diese für alle Eingaben aus $Q \times \Gamma$ definiert sein. Dies kann man erreichen, indem man für die restlichen Fälle $\delta(q, x) = (q, x, N)$ definiert.

2. Da jedes Wort aus Σ^* in den Endzustand führt, ist $T(M) = \Sigma^*$.

3. Es gilt: $0aba \vdash a0ba \vdash aa1a \vdash a2ab \vdash aa0b \vdash aaa1 \vdash aa3a \vdash a4ab \vdash 4aab \vdash 4\Box aab \vdash 5aab$.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. Zu jeder Typ-0-Grammatik G gibt es eine äquivalente Grammatik bei der alle Regeln von einem der folgenden 5 Typen sind:

$$A \to a \qquad A \to B \qquad A \to BC \qquad AB \to CD \qquad A \to \varepsilon$$

2. Zu jeder Typ-0-Grammatik G mit $\varepsilon \notin L(G)$ gibt es eine äquivalente Grammatik bei der alle Regeln von einem der folgenden 4 Typen sind:

$$A \to a \qquad A \to BC \qquad AB \to CDE \qquad ABC \to DEF$$

Lösung

1. Die Aussage ist wahr. Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine beliebige Typ-0-Grammatik. Ersetzt man in G jede verkürzende Regel $\alpha \to \beta$ durch $\alpha \to \beta X^{|\alpha|-|\beta|}$ (mit $X \notin V$ beliebig), so erhält man eine Typ-1-Grammatik. Diese kann laut Vorlesung in Kuroda-Normalform gebracht werden. Beim Hinzufügen der verkürzenden Regel $X \to \varepsilon$ erhält man eine zu G äquivalente Grammatik in der gewünschten Form.

2. Die Aussage ist falsch. Wäre die Aussage richtig, dann könnte man zu jeder Typ-0-Grammatik eine äquivalente Typ-1-Grammatik finden. Somit wäre jede Typ-0-Sprache vom Typ 1. Aus der Vorlesung wissen wir allerdings, dass das nicht so ist (siehe Vorlesungsfolie 3.1).

Präsenzaufgabe 2

Geben Sie eine Turingmaschine (DTM oder NTM) M an, die die Sprache

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

akzeptiert. Geben Sie zusätzlich eine akzeptierende Konfigurationsfolge für das Eingabewort abc an.

Lösung

Wir wählen eine DTM

$$M = (\{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,\#,\Box\}, \delta, 0, \Box, \{7\})$$

mit

q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$	$\delta(q,c)$	$\delta(q,\#)$	$\delta(q,\Box)$
0	$(0,a,R)$	$(1,b,R)$			$(3,\Box,L)$
1		$(1,b,R)$	$(2,c,R)$		
2			$(2,c,R)$		$(3,\Box,L)$
3	$(3,a,L)$	$(3,b,L))$	$(3,c,L)$	$(3,\#,L)$	$(4,\Box,R)$
4	$(5,\#,R)$			$(4,\#,R)$	$(7,\Box,N)$
5	$(5,a,R)$	$(6,\#,R)$		$(5,\#,R)$	
6		$(6,b,R)$	$(3,\#,L)$	$(6,\#,R)$	
7					

wobei wir für die restlichen Fälle $\delta(q,x) = (q,x,N)$ definieren.

Intuitive Bedeutung der Zustände:

0: Startzustand. Überprüfe, dass das Wort mit as beginnt. Wenn ein b gefunden wird, gehe in den Zustand 1 über.

1: Überprüfe, dass bs nach den as kommen. Wenn ein c gefunden wird, gehe in den Zustand 2 über.

2: Überprüfe, dass nach den bs nur noch cs kommen. Wenn das Ende des Wortes erreicht wird, gehe in den Zustand 3 über.

3: Bewege den Leseschreibkopf bis zum Anfang des Wortes und gehe dann in den Zustand 4 über.

4: Ersetze das linkeste a durch ein # und gehe in den Zustand 5 über. Falls kein a vorhanden ist, aber ein b oder c: Endlosschleife. Falls nur # vorhanden sind, akzeptiere.

5: Ersetze das linkeste b durch ein # und gehe in den Zustand 6 über. Falls kein b gefunden wird: Endlosschleife.

6: Ersetze das linkeste c durch ein # und gehe in den Zustand 3 über. Falls kein c gefunden wird: Endlosschleife.

7: Endzustand.

Eine Simulation dieser Turingmaschine kann unter

`http://morphett.info/turing/?73cf1e24ab0c937812062e8699936186`

gefunden werden.

Akzeptierende Konfigurationsfolge für abc:

$0abc \vdash a0bc \vdash ab1c \vdash abc2 \vdash ab3c \vdash a3bc \vdash 3abc \vdash 3\Box abc \vdash 4abc \vdash \#5bc \vdash \#\#6c \vdash \#3\#\# \vdash 3\#\#\# \vdash 3\Box\#\#\# \vdash 4\#\#\# \vdash \#4\#\# \vdash \#\#4\# \vdash \#\#\#4 \vdash \#\#7.$

Alternative Lösung

Man konstruiert die Turingmaschine so, dass sie „on the fly" überprüft, ob das Eingabewort von der Form $a^k b^l c^m$ ist.

Wir erhalten die DTM

$$M = (\{0,1,2,3,4,5\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,\#,\Box\}, \delta, 0, \Box, \{5\})$$

mit

q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$	$\delta(q,c)$	$\delta(q,\#)$	$\delta(q,\Box)$
0	$(1,\#,R)$			$(0,\#,R)$	$(5,\Box,N)$
1	$(1,a,R)$	$(2,\#,R)$		$(1,\#,R)$	
2		$(2,b,R)$	$(3,\#,R)$	$(2,\#,R)$	
3			$(3,c,R)$		$(4,\Box,L)$
4	$(4,a,L)$	$(4,b,L))$	$(4,c,L)$	$(4,\#,L)$	$(0,\Box,R)$
5					

wobei wir für die restlichen Fälle wieder $\delta(q,x) = (q,x,N)$ definieren.

Intuitive Bedeutung der Zustände:

0: Startzustand. Ersetze das linkeste a durch ein # und gehe in den Zustand 1 über. Falls kein a vorhanden ist, aber ein b oder c: Endlosschleife. Falls nur # vorhanden sind, akzeptiere.

1: Ersetze das linkeste b durch ein # und gehe in den Zustand 2 über. Falls kein b gefunden wird: Endlosschleife.

2: Ersetze das linkeste c durch ein # und gehe in den Zustand 3 über. Falls kein c gefunden wird: Endlosschleife.

3: Bewege den Leseschreibkopf bis zum Ende des Wortes und gehen in den Zustand 4 über. Falls ein a oder ein b gesehen wird, geh in eine Endlosschleife.

4: Bewege den Leseschreibkopf bis zum Anfang des Wortes und gehe dann in den Zustand 0 über.

5: Endzustand.

Eine Simulation dieser Turingmaschine kann unter

`http://morphett.info/turing/?5f7437e455acdf369990bcad40d8f5a7`

gefunden werden.

Akzeptierende Konfigurationsfolge für abc:

$0abc \vdash \#1bc \vdash \#\#2c \vdash \#\#\#3 \vdash \#\#4\# \vdash \#4\#\#\# \vdash 4\#\#\# \vdash 4\Box\#\#\# \vdash 0\#\#\# \vdash \#0\#\# \vdash \#\#0\# \vdash \#\#\#0 \vdash \#\#\#5$.

Präsenzaufgabe 3

Geben Sie eine Turingmaschine (DTM oder NTM) M mit höchstens 10 Zuständen an, die die Sprache

$$L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

akzeptiert. Geben Sie zusätzlich eine akzeptierende Konfigurationsfolge für das Eingabewort $bbbb$ an.

Lösung

Wir wählen eine NTM $M = (\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \{a,b\}, \{a,b,\#,\Box\}, \delta, 0, \Box, \{9\})$ mit

q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$	$\delta(q,\#)$	$\delta(q,\Box)$
0	$\{(1,\#,R)\}$	$\{(2,\#,R)\}$	$\emptyset$	$\{(9,\Box,N)\}$
1	$\{(1,a,R),(3,\#,L)\}$	$\{(1,b,R)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\{(2,a,R)\}$	$\{(2,b,R),(3,\#,L)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
3	$\{(3,a,L)\}$	$\{(3,b,L)\}$	$\{(3,\#,L)\}$	$\{(4,\Box,R)\}$
4	$\{(5,\#,R)\}$	$\{(6,\#,R)\}$	$\{(4,\#,R)\}$	$\{(9,\Box,N)\}$
5	$\{(5,a,R)\}$	$\{(5,b,R)\}$	$\{(7,\#,R)\}$	$\emptyset$
6	$\{(6,a,R)\}$	$\{(6,b,R)\}$	$\{(8,\#,R)\}$	$\emptyset$
7	$\{(3,\#,L)\}$	$\emptyset$	$\{(7,\#,R)\}$	$\emptyset$
8	$\emptyset$	$\{(3,\#,L)\}$	$\{(8,\#,R)\}$	$\emptyset$
9	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Intuitive Bedeutung der Zustände:

0: Startzustand. Ersetze das erste Zeichen im Wort durch # und gehe entsprechend in den Zustand 1 oder 2 über.

1: Das erste Zeichen ist ein a. Suche nichtdeterministisch das erste Zeichen der zweiten Hälte des Wortes und falls dieses ein a ist, ersetze es durch ein # und gehe in den Zustand 3 über.

2: Das erste Zeichen ist ein b. Suche nichtdeterministisch das erste Zeichen der zweiten Hälte des Wortes und falls dieses ein b ist, ersetze es durch ein # und gehe in den Zustand 3 über.

3: Bewege den Leseschreibkopf bis zum Anfang des Wortes und gehe dann in den Zustand 4 über.

4: Ersetze das linkeste a oder b durch ein # und gehe entsprechend in den Zustand 5 oder 6 über. Falls nur # vorhanden sind, akzeptiere.

5: Ein a wurde in der linken Hälfte des Wortes ersetzt. Bewege den Leseschreibkopf zur zweiten Hälfte des Wortes und gehe in den Zustand 7 über.

6: Ein b wurde in der linken Hälfte des Wortes ersetzt. Bewege den Leseschreibkopf zur zweiten Hälfte des Wortes und gehe in den Zustand 8 über.

7: Falls das erste Zeichen aus Σ in der zweiten Worthälfte ein a ist, ersetze es durch ein # und gehe in den Zustand 3 über. Sonst: Endlosschleife.

8: Falls das erste Zeichen aus Σ in der zweiten Worthälfte ein b ist, ersetze es durch ein # und gehe in den Zustand 3 über. Sonst: Endlosschleife.

9: Endzustand. Akzeptiere das Eingabewort.

Akzeptierende Konfigurationsfolge für $bbbb$:

$0bbbb \vdash \#2bbb \vdash \#b2bb \vdash \#3b\#b \vdash 3\#b\#b \vdash 3\Box\#b\#b \vdash 4\#b\#b \vdash \#4b\#b \vdash \#\#6\#b \vdash \#\#\#8b \vdash \#\#3\#\# \vdash \#3\#\#\# \vdash 3\#\#\#\# \vdash 3\Box\#\#\#\# \vdash 4\#\#\#\# \vdash \#4\#\#\# \vdash \#\#4\#\# \vdash \#\#\#4\# \vdash \#\#\#\#4\Box \vdash \#\#\#\#9\Box$.

Präsenzaufgabe 4

Seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Zahl, $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ein m-elementiges Alphabet und

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommt jeder Buchstabe aus } \Sigma \text{ vor}\}$$

eine Sprache über Σ.

1. Geben Sie eine DTM M für L an, die den Leseschreibkopf nie nach links bewegt.
2. Geben Sie eine DTM M mit höchstens $2m$ Zustände für L an.

Lösung

1. $M = (\mathcal{P}(\Sigma), \Sigma, \Sigma \cup \{\Box\}, \delta, \emptyset, \Box, \{\Sigma\})$ mit

$$\delta(q, x) = \begin{cases} (q, \Box, N) & \text{für } x = \Box \\ (q \cup \{x\}, x, R) & \text{für } x \neq \Box. \end{cases}$$

2. $M = (\{s_1, \ldots, s_m, f_1, \ldots, f_m\}, \Sigma, \Sigma \cup \{\square\}, \delta, s_1, \square, \{f_m\})$ mit

$$\delta(s_i, a_j) = \begin{cases} (f_i, a_j, N) & \text{für } i = j \\ (s_i, a_j, R) & \text{für } i \neq j \end{cases} \qquad \delta(s_i, \square) = (s_i, \square, N)$$

$$\delta(f_i, a_j) = (f_i, a_j, L) \qquad \delta(f_i, \square) = \begin{cases} (f_i, \square, N) & \text{für } i = m \\ (s_{i+1}, \square, R) & \text{für } i \neq m \end{cases}$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$.

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und

$$L = \left\{ w \in \Sigma^* \,\middle|\, w^R = w \right\}$$

eine Sprache über Σ.

1. Geben Sie eine DTM M an, die L akzeptiert.
2. Geben Sie eine akzeptierende Konfigurationsfolge für das Eingabewort *abba* an.

Lösung

Bitte selber lösen und Lösungsvorschlag mit einem Turingmaschinensimulator testen.