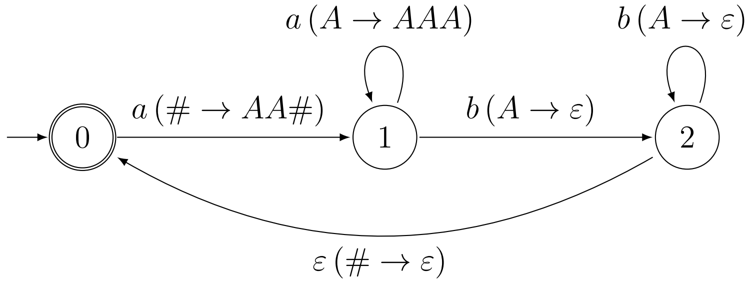
Lösungen zum Ergänzungsblatt 11

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Geben Sie einen DPDA für die Sprache $L = \left\{a^k b^{2k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ an.

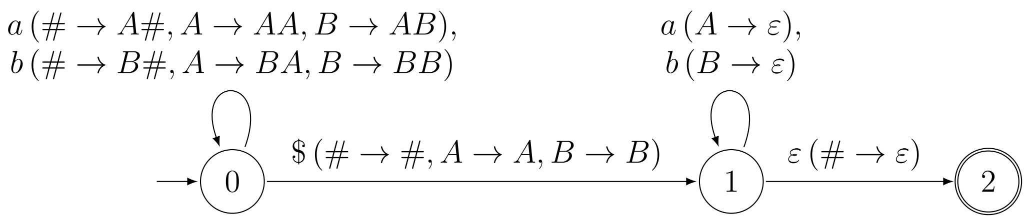
Lösung



Vorbereitungsaufgabe 2

Geben Sie einen DPDA für die Sprache $L = \left\{w\$w^R \,\middle|\, w \in \{a,b\}^*\right\}$ an.

Lösung



Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen DPDA an.

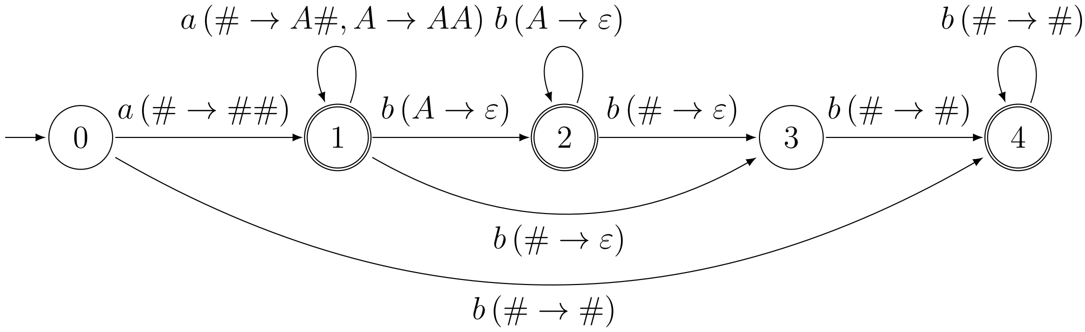
1. $L = \left\{a^k b^l \,\middle|\, k \neq l\right\}$
2. $L = \left\{a^{2k} b^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$
3. $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$

Verwenden Sie möglichst wenige Zustände und Kellersymbole.

Lösung

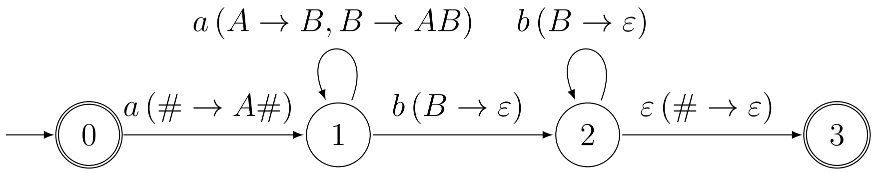
Lösungen mit weniger Zuständen oder Kellersymbolen sind herzlich willkommen!

1. Mit 5 Zuständen und 2 Kellersymbolen:

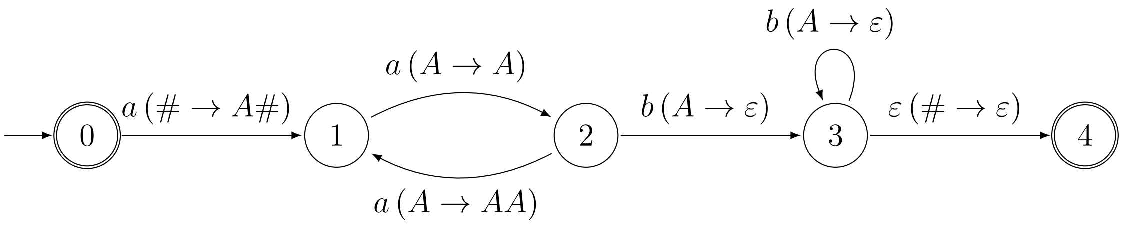


Alternativ hätten man die Kante von 0 nach 1 mit $a\,(\# \to \#)$ und die Kanten von 1 und 2 nach 3 mit $b\,(\# \to \#)$ beschriften können.

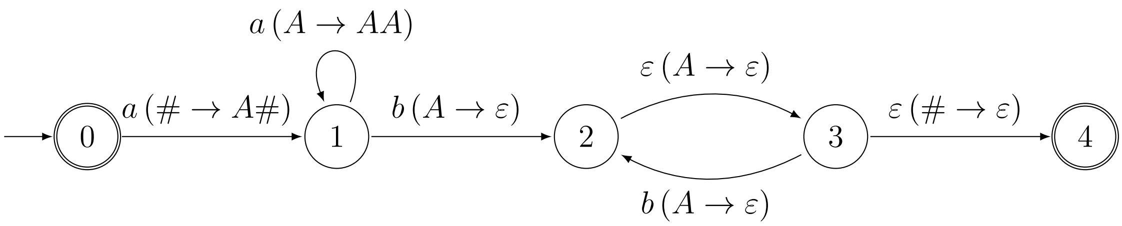
2. Mit 4 Zuständen und 3 Kellersymbolen:



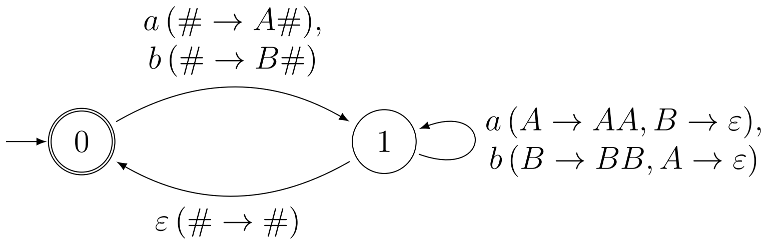
Mit 5 Zuständen und 2 Kellersymbolen:



Ebenfalls mit 5 Zuständen und 2 Kellersymbolen:



3. Mit 2 Zuständen und 3 Kellersymbolen:



Präsenzaufgabe 2

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, L die Sprache

$$L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$$

über Σ und $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ ihr Komplement.

1. Zeigen Sie, dass L nicht kontextfrei ist.
2. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = \overline{L}$ an.
3. Ist $\overline{L}$ auch deterministisch kontextfrei? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösung

1. Wir verwenden das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

   Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $z = a^n b^n a^n b^n$. Dann gilt $z \in L$ und $|z| = 4n \geq n$. Seien nun $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $z = uvwxy$, $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$. Wähle $i = 0$. Dann ist $z' = uv^i wx^i y = uwy$ von der Form $z' = a^{n-k_1} b^{n-k_2} a^{n-k_3} b^{n-k_4}$ für Konstanten $0 \leq k_1, k_2, k_3, k_4 \leq n$.

   Wir zeigen $z' \notin L$ per Widerspruch.

   Angenommen, es gilt $z' \in L$. Dann gilt $k_1 = k_3$ und $k_2 = k_4$. Wegen $|vwx| \leq n$ gilt jedoch $k_1 = k_2 = 0$, $k_2 = k_3 = 0$ oder $k_3 = k_4 = 0$. Daraus folgt $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, was $|vx| \geq 1$ widerspricht. $\square$

2. $G = (\{S, A, B, X\}, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to AB \mid BA \mid A \mid B \\ A &\to XAX \mid a \\ B &\to XBX \mid b \\ X &\to a \mid b. \end{aligned}$$

3. Nein. Wäre $\overline{L}$ deterministisch kontextfrei, dann müsste auch $\overline{\overline{L}} = L$ deterministisch kontextfrei und somit auch kontextfrei sein, was dem Ergebnis aus Teilaufgabe 1 widerspricht.

Präsenzaufgabe 3

Ziel dieser Aufgabe ist es, die intuitive Arbeitsweise von Turingmaschinen zu verstehen, bevor diese in der Vorlesung formal eingeführt werden.

Entwerfen Sie auf

`http://morphett.info/turing`

eine Turingmaschine, die die Buchstaben innerhalb eines Eingabewortes aus $\{a, b\}^*$ so sortiert, dass kein b vor einem a vorkommt. Vor dem Halten soll die Turingmaschine den Leseschreibkopf auf das linkeste beschriebene Feld positionieren.

Hinweis: Die Lösung wurde nach der Ergänzung leicht vereinfacht. Im Gegensatz zu der vorgestellten Lösung in der Ergänzung, wird das Symbol # nicht mehr verwendet.

Lösung

Eine Turingmaschine ist, sowie DEAs, NEAs, DPDAs und PDAs, ein mathematisches Modell einer Rechenmaschine. Intuitiv besteht eine Turingmaschine aus einer endlichen Menge von Zuständen, einem Band mit unendlich vielen sequentiell angeordneten Feldern und einem Leseschreibkopf, der sich über die Felder bewegen und, in Abhängigkeit von dem aktuellen Zustand, den Feldinhalt (ein Zeichen) und den aktuellen Zustand verändern kann.

Das Verhalten einer Turingmaschine wird von einer Funktion δ beschrieben. Diese bekommt den aktuellen Zustand q und den Inhalt x des Feldes auf dem sich der Leseschreibkopf befindet und gibt ein Tripel $\delta(q, x) = (q', x', m)$ zurück, wobei q' der neue Zustand ist, x' das Zeichen womit das x überschrieben wird und $m \in \{L, R, N\}$ die Bewegung von dem Leseschreibkopf nach der Operation:

- L: ein Feld nach links
- R: ein Feld nach rechts
- N: keine Bewegung

Eine Turingmaschine beginnt im Startzustand mit dem Leseschreibkopf auf dem ersten Zeichen des Eingabewortes. Die restlichen Felder (links und rechts von der Eingabe) sind leer. Die Berechnung einer Turingmaschine endet sobald diese einen Endzustand erreicht hat.

Eine mögliche Lösungsstrategie verwendet folgende 6 Zustände:

- 0: Startzustand. Suche das linkeste b, ersetze es durch ein a und gehe in den Zustand 1 über. Falls kein b gefunden wird, gehe in den Zustand 4 über.
- 1: Suche das linkeste a rechts von dem ersetztem Zeichen, ersetze es durch ein b und gehe in den Zustand 2 über. Falls kein a gefunden wird, gehe in den Zustand 3 über.
- 2: Bewegen den Leseschreibkopf zum Feld rechts von dem ersetztem Zeichen und gehe erneut in den Zustand 0 über.
- 3: Ersetze das rechteste a durch ein b und gehe in den Zustand 4 über.

4: Die Zeichen sind korrekt sortiert. Bringe den Leseschreibkopf an das linke Ende des Wortes.

5: Endzustand.

Als Tabelle:

alter Zustand	altes Zeichen	neuer Zustand	neues Zeichen	Kopfbewegung
0	a	0	a	R
0	b	1	a	R
0	$\square$	4	$\square$	L
1	b	1	b	R
1	a	2	b	L
1	$\square$	3	$\square$	L
2	b	2	b	L
2	a	0	a	R
3	b	3	b	L
3	a	4	b	L
4	a	4	a	L
4	b	4	b	L
4	$\square$	5	$\square$	R

Eine Simulation dieser Lösungsstrategie kann unter

`http://morphett.info/turing/?2a665e8efd8c9fc4cc5df75e7cd91412`

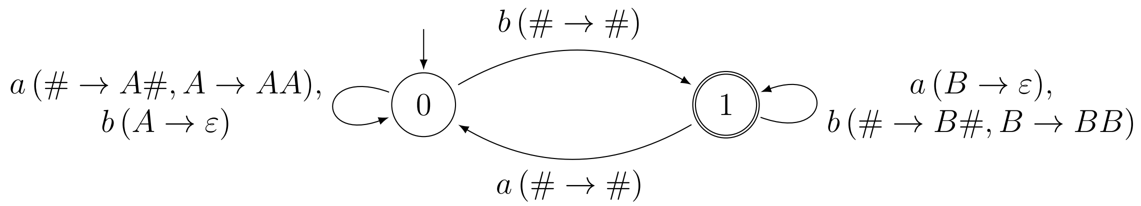
gefunden werden.

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Geben Sie einen DPDA für die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a < |w|_b\}$ an.

Lösung



Zusatzaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $L = \left\{a^k b^l c^m \;\middle|\; k + l = m\right\}$ eine Sprache über Σ.

1. Geben Sie eine Typ-2-Grammatik G mit $L(G) = L$ an. Ihre Grammatik darf höchstens $\not{6}$ 7 Produktionsregeln besitzen und soll die ε-Sonderregel einhalten.

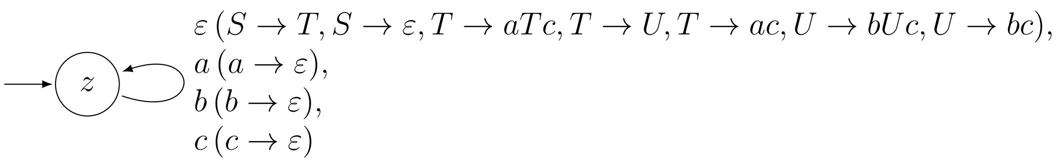
2. Geben Sie den PDA M mit $N(M) = L(G)$ aus Vorlesungsfolie 30.2 grafisch an.
3. Ist L auch deterministisch kontextfrei? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösung

1. $G = (\{S, T, U\}, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to T \mid \varepsilon \\ T &\to aTc \mid U \mid ac \\ U &\to bUc \mid bc. \end{aligned}$$

2. $M = (\{z\}, \{a, b, c\}, \{S, T, U, a, b, c\}, \delta, z, S)$ mit folgender Übergangsfunktion:



3. L ist deterministisch kontextfrei. Ein möglicher DPDA für L ist: