Lösungen zum Ergänzungsblatt 10

Seien 🎄 $= a$, ⛄ $= b$ und 🍪 $= c$.

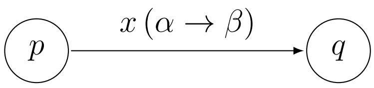
Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Sei $M = (\{0,1\}, \{$🎄, ⛄, 🍪$\}, \{\#\}, \delta, 0, \#)$ ein PDA mit

$\delta(0,\varepsilon,\#) = \{(1,\#)\}$	$\delta(1,\varepsilon,\#) = \emptyset$
$\delta(0,$🎄$,\#) = \{(0,\#)\}$	$\delta(1,$🎄$,\#) = \{(1,\#)\}$
$\delta(0,$⛄$,\#) = \{(0,\varepsilon)\}$	$\delta(1,$⛄$,\#) = \{(1,\#)\}$
$\delta(0,$🍪$,\#) = \emptyset$	$\delta(1,$🍪$,\#) = \{(0,\#\#),(1,\varepsilon)\}$

1. Stellen Sie M grafisch dar. Verwenden Sie die grafische Darstellung von NEAs mit Übergängen der Form

   für $(q,\beta) \in \delta(p,x,\alpha)$.

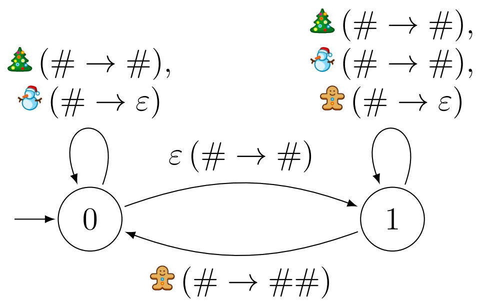
   Hinweis: Folgende Formate sind für die Kantenbeschriftungen von PDAs ebenfalls gängig und bei uns zulässig:

   (a) x, α, β (b) $x, \alpha/\beta$ (c) $x, \alpha \to \beta$ (d) $(x,\alpha) \to \beta$

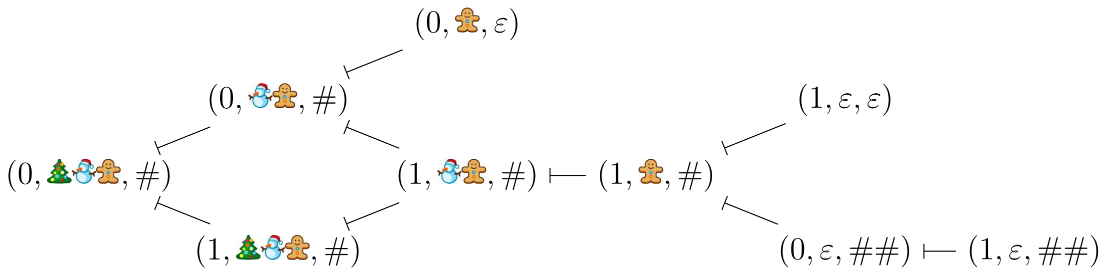
2. Sei $w =$ 🎄⛄🍪. Geben Sie alle von der Startkonfiguration $(0, w, \#)$ erreichbaren Konfigurationen an. Gilt $w \in N(M)$?

Lösung

1.



2. Folgende 9 Konfigurationen sind erreichbar:



Wegen $(0, w, \#) \vdash^* (1, \varepsilon, \varepsilon)$ gilt $w \in N(M)$.

Präsenzaufgaben

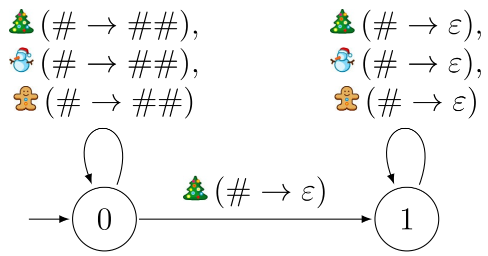
Präsenzaufgabe 1

Sei $\Sigma = \{$🎄, ⛄, 🍪$\}$ ein Alphabet.

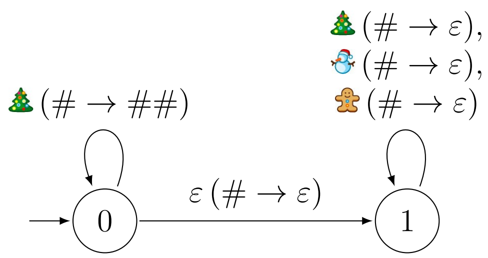
1. Geben Sie grafisch einen PDA M_1 mit $N(M_1) = \{u$🎄$v \mid u, v \in \Sigma^* \wedge |u| = |v|\}$
2. Geben Sie grafisch einen PDA M_2 mit $N(M_2) = \left\{ 🎄^{|w|} w \,\middle|\, w \in \Sigma^* \right\}$
3. Überprüfen Sie, dass 🎄🎄⛄🍪 von M_2 akzeptiert wird, aber nicht von M_1.

Lösung

1.



2.



3. M_2: Wegen $(0,$ 🎄🎄⛄🍪$, \#) \vdash (0,$ 🎄⛄🍪$, \#\#) \vdash (0,$ ⛄🍪$, \#\#\#) \vdash (1,$ ⛄🍪$, \#\#) \vdash (1,$ 🍪$, \#) \vdash (1, \varepsilon, \varepsilon)$ gilt $(0,$ 🎄🎄⛄🍪$, \#) \vdash^* (1, \varepsilon, \varepsilon)$ und somit 🎄🎄⛄🍪 $\in N(M_2)$.

   M_1: Von $(0,$ 🎄🎄⛄🍪$, \#)$ sind folgende 8 Konfigurationen erreichbar:

$$(0, \text{🎄🎄⛄🍪}, \#) \vdash (0, \text{🎄⛄🍪}, \#\#) \vdash (0, \text{⛄🍪}, \#^3) \vdash (0, \text{🍪}, \#^4) \longmapsto (0, \varepsilon, \#^5)$$

$$(0, \text{🎄⛄🍪}, \#\#) \vdash (1, \text{⛄🍪}, \#) \longmapsto (1, c, \varepsilon)$$

$$(0, \text{🎄🎄⛄🍪}, \#) \vdash (1, \text{🎄⛄🍪}, \varepsilon)$$

Da weder $(0, \varepsilon, \varepsilon)$ noch $(0, \varepsilon, \varepsilon)$ erreichbar sind, gilt gilt $\text{🎄🎄⛄🍪} \notin N(M_1)$.

Hinweis: Da der Kellerinhalt ebenfalls ein Wort (über dem Kelleralphabet) ist, gelten für ihn die üblichen Operationen auf Wörtern, z. B. $\#^3 = \#\#\#$, $\#^4 = \#\#\#\#$ und $\#^5 = \#\#\#\#\#$.

Präsenzaufgabe 2

Ein *PDA mit Endzuständen* M ist ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#, F)$, sodass $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#)$ ein PDA ist und $F \subseteq Q$ gilt. Die von M akzeptierte Sprache ist

$$N(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists f \in F, X \in \Gamma^* \colon (s, w, \#) \vdash^* (f, \varepsilon, X)\},$$

wobei die Relation $\vdash$ analog wie bei PDAs definiert wird.

M heißt *deterministisch*, wenn für alle $q \in Q$, alle $x \in \Sigma$ und alle $X \in \Gamma$ gilt:

$$|\delta(q, x, X)| + |\delta(q, \epsilon, X)| \leq 1.$$

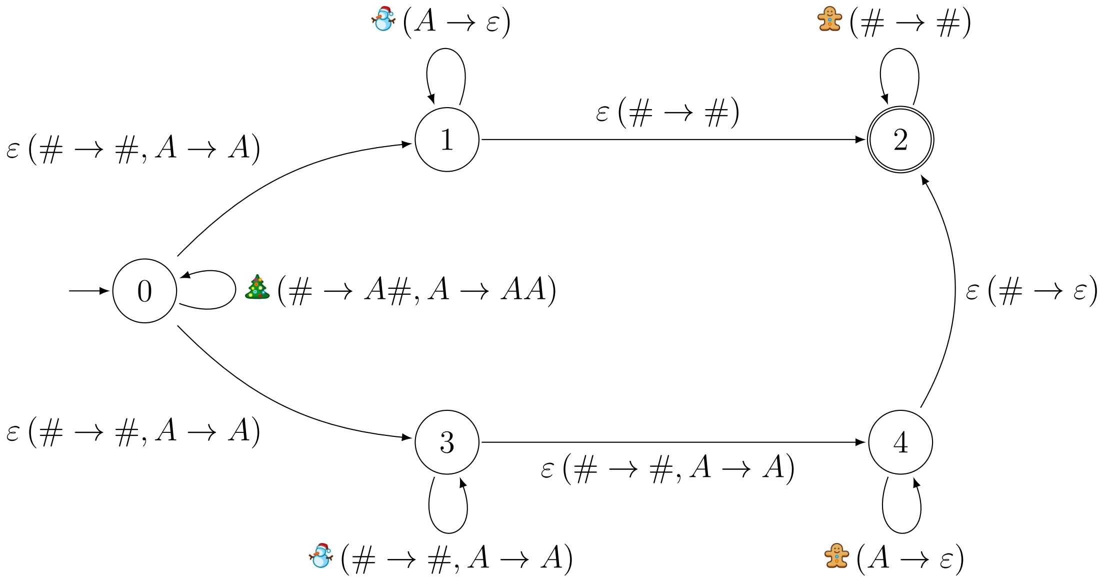
In diesem Fall nennen wir M kurz *DPDA*.

1. Geben Sie einen PDA mit Endzuständen M_1 für $L_1 = \left\{ \text{🎄}^k \text{⛄}^l \text{🍪}^m \,\middle|\, k \in \{l, m\} \right\}$ an.
2. Warum ist M_1 nicht deterministisch?
3. Geben Sie einen DPDA M_2 für $L_2 = \left\{ \text{🎄}^k \text{⛄}^l \,\middle|\, 2k < l \right\}$ an.

Hinweise: Endzustände können grafisch wie üblich durch Doppelkreise dargestellt werden.

Lösung

1. Bei Kantenbeschriftungen können wir kurz $x\,(\alpha_1 \to \beta_1, \ldots, \alpha_n \to \beta_n)$ statt $x\,(\alpha_1 \to \beta_1), \ldots, x\,(\alpha_n \to \beta_n)$ schreiben.



Bemerkung: Im Erklärungsvideo habe ich gesagt, dass man vom Zustand 4 nicht in den Zustand 2 kommen darf, weil man sonst beliebig viele 🍪s lesen könnte. Weil der Keller jedoch geleert wird, ist das kein Problem.

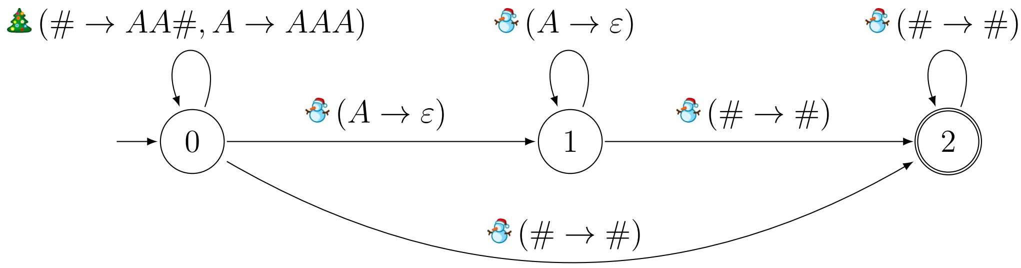
2. M_1 ist kein DPDA, da

$$|\delta(0, 🎄, \#)| + |\delta(0, \varepsilon, \#)| = 1 + 2 = 3 \not\leq 1.$$

Alternative Begründungen sind:

- $|\delta(0, 🎄, A)| + |\delta(0, \varepsilon, A)| = 1 + 2 = 3 \not\leq 1$
- $|\delta(3, ⛄, \#)| + |\delta(3, \varepsilon, \#)| = 1 + 1 = 2 \not\leq 1$
- $|\delta(3, ⛄, A)| + |\delta(3, \varepsilon, A)| = 1 + 1 = 2 \not\leq 1$

3.



Zusatzaufgaben

Keine Zusatzaufgaben, denn Ferien sind zum Erholen da. Schöne Weihnachtsferien und einen guten Rutsch ins neue Jahr! Bis zum 11. Januar in alter Frische. :-)