Lösungen zum Ergänzungsblatt 9

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Unter welchen der folgenden Operationen ist die Klasse der kontextfreien Sprachen abgeschlossen?

1. Komplement
2. Kleene-Stern
3. Vereinigung
4. Schnitt
5. Konkatenation

Wiederholen Sie die dazugehörigen Beweise aus der Vorlesung.

Lösung

Siehe Vorlesungsfolien 24.3 - 25.1.

Vorbereitungsaufgabe 2

Seien $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik in Chomsky-Normalform und $w = a_1 \dots a_n$ ein Wort mit $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$. Wir betrachten die vom CYK-Algorithmus verwendeten Mengen $T_{i,j}$, wenn dieser auf G und w gestartet wird.

Geben Sie für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n - i + 1$ eine möglichst einfache Definition von $T_{i,j}$ an.

Lösung

$T_{i,j}$ enthält alle Variablen, von denen sich derjenige Infix von w ableiten lässt, der an der i-ten Position in w beginnt und Länge j hat, d. h.:

$$T_{i,j} = \{A \in V \mid A \Rightarrow_G^* a_i \dots a_{i+j-1}\}.$$

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $L_1 = \left\{ a^{k^2+100} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$ über $\Sigma = \{a\}$
2. $L_2 = \left\{ a^{k^2+l} \,\middle|\, k, l \in \mathbb{N} \right\}$ über $\Sigma = \{a\}$

Lösung

1. Wäre L_1 kontextfrei, dann wäre L auch regulär, da L eine unäre Sprache ist. Dann wäre aber auch die Sprache

$$\{a^{100}\}^{-1}L_1 = \left\{ v \,\middle|\, \exists u \in \{a^{100}\} \colon uv \in L_1 \right\} = \left\{ v \,\middle|\, a^{100}v \in L_1 \right\} = \left\{ a^{k^2} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$$

   (vgl. Übungsblatt 6, Aufgabe 5) regulär, ein Widerspruch!

2. Es gilt $L_2 = L(a^*)$. Somit ist L_2 regulär und demnach auch kontextfrei.

Präsenzaufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Sprachen A und B richtig und welche falsch? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. Wenn $A \cap B$ kontextfrei ist, dann sind auch A und B kontextfrei.
2. Wenn A^* kontextfrei ist, dann ist auch A kontextfrei.
3. Wenn $A \subseteq B$ gilt und B kontextfrei ist, dann ist auch A kontextfrei.

Lösung

Alle Aussagen sind falsch. Für die Gegenbeispiele benötigen wir eine nicht kontexfreie Sprache L. Eine einfache Wahl ist $L = \left\{ a^{k^2} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Für $A = \emptyset$ und $B = L$ ist $A \cap B = \emptyset$ kontextfrei, aber B nicht.
2. Für $A = L$ ist $A^* = \{a\}^*$ kontextfrei, aber A nicht.
3. Für $A = L$ und $B = \{a\}^*$ gilt $A \subseteq B$ und B ist kontextfrei, aber A nicht.

Präsenzaufgabe 3

Seien $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to BA \mid CA \mid b, \\ A &\to BA \mid a, \\ B &\to CC \mid b, \\ C &\to AB \mid a. \end{aligned}$$

und $w = abba$ ein Wort.

1. Führen Sie den CYK-Algorithmus auf G und w aus.

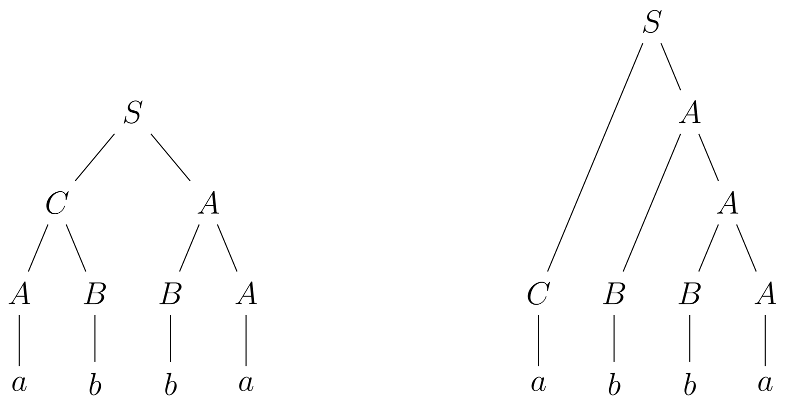
2. Warum gilt $w \in L(G)$?
3. Geben Sie einen Syntaxbaum für w in G an.
4. Welche Infixe von w sind in L enthalten?

Lösung

1.

$\{S\}$			
$\emptyset$	$\{S, A\}$		
$\{C\}$	$\emptyset$	$\{S, A\}$	
$\{A, C\}$	$\{S, B\}$	$\{S, B\}$	$\{A, C\}$
a	b	b	a

2. Wegen $S \in T_{1,4}$.
3. w besitzt zwei mögliche Syntaxbäume in G:



4. b, ba, bba und $abba$.

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E, F, G\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik mit Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to B \mid C \mid GaCB & \qquad D &\to aCb \mid ba \mid G \\ A &\to a \mid E & E &\to A \mid F \\ B &\to AD \mid F & F &\to b \mid A \\ C &\to a \mid A & G &\to CE \mid D. \end{aligned}$$

Wandeln Sie G in eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform um.

Lösung

Wir führen die Schritte 1 - 5 aus den Vorlesungsfolien 19.3 - 20.1 aus.

Schritt 1

A, E und F bilden eine Ringableitung. Wir ersetzen alle drei Variablen durch H, entfernen die Regel $H \to H$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
&S \to B \mid C \mid GaCB\\
&B \to HD \mid H\\
&C \to a \mid H\\
&D \to aCb \mid ba \mid G\\
&G \to CH \mid D\\
&H \to a \mid b.
\end{aligned}$$

Auch D und G bilden eine Ringableitung. Wir ersetzen beide Variablen durch I, entfernen die Regel $I \to I$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
&S \to B \mid C \mid IaCB\\
&B \to HI \mid H\\
&C \to a \mid H\\
&H \to a \mid b\\
&I \to aCb \mid ba \mid CH.
\end{aligned}$$

Schritt 2

Bei der Anordnung der Variablen muss S vor B und C kommen und sowohl B als auch C müssen vor H kommen. Eine von 10 möglichen Anordnungen ist S, B, C, H, I.

Schritt 3

Durch Beseitigen der Regel $C \to H$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&S \to B \mid C \mid IaCB\\
&B \to HI \mid H\\
&C \to a \mid b\\
&H \to a \mid b\\
&I \to aCb \mid ba \mid CH.
\end{aligned}$$

Durch Beseitigen der Regel $B \to H$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&S \to B \mid C \mid IaCB\\
&B \to HI \mid a \mid b\\
&C \to a \mid b\\
&H \to a \mid b\\
&I \to aCb \mid ba \mid CH.
\end{aligned}$$

Durch Beseitigen der Regel $S \to B$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&S \to a \mid b \mid C \mid HI \mid IaCB\\
&B \to HI \mid a \mid b\\
&C \to a \mid b\\
&H \to a \mid b\\
&I \to aCb \mid ba \mid CH.
\end{aligned}$$

Durch Beseitigen der Regel $S \to C$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&S \to a \mid b \mid HI \mid IaCB\\
&B \to HI \mid a \mid b\\
&C \to a \mid b\\
&H \to a \mid b\\
&I \to aCb \mid ba \mid CH.
\end{aligned}$$

<u>Schritt 4</u>

Mit den Pseudoterminalen J und K erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&S \to a \mid b \mid HI \mid IJCB\\
&B \to HI \mid a \mid b\\
&C \to a \mid b\\
&H \to a \mid b\\
&I \to JCK \mid KJ \mid CH\\
&J \to a\\
&K \to b.
\end{aligned}$$

<u>Schritt 5</u>

Wir verkürzen die rechten Seiten der Regeln $S \to IJCB$ und $I \to JCK$ und erhalten die endgültige Regelmenge:

$$\begin{aligned}
&S \to a \mid b \mid HI \mid IM\\
&B \to HI \mid a \mid b\\
&C \to a \mid b\\
&H \to a \mid b\\
&I \to JN \mid KJ \mid CH\\
&J \to a\\
&K \to b\\
&L \to CB\\
&M \to JL\\
&N \to CK.
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Sprachen A und B richtig und welche falsch? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. Wenn $A \cup B$ kontextfrei ist, dann sind A und B kontextfrei.
2. Wenn $A \subseteq B$ gilt und A kontextfrei ist, dann ist auch B kontextfrei.
3. Wenn AB kontextfrei ist, dann sind auch A und B kontextfrei.

Lösung

Alle Aussagen sind falsch. Auch hier verwenden wir die Sprache $L = \left\{ a^{k^2} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$ für die Gegenbeispiele.

1. Für $A = L$ und $B = \{a\}^*$ ist $A \cup B = \{a\}^*$ kontextfrei, aber A nicht.
2. Für $A = \emptyset$ und $B = L$ gilt $A \subseteq B$, aber A ist nicht kontextfrei.
3. Für $A = \emptyset$ und $B = L$ ist $AB = \emptyset$ kontextfrei, aber B nicht.

Zusatzaufgabe 3

Spielen Sie ein bisschen mit folgender Webseite herum:

`www.xarg.org/tools/cyk-algorithm`

Lösung

Viel Spaß! :-)