Lösungen zum Ergänzungsblatt 7

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Wiederholen Sie die Begriffe aus Übungsblatt 0, Abschnitt 4.

1. Welche der Paare $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, -)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{N}, \max)$, $(\mathbb{N}, \min)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ und $(\{a, b\}^*, \cdot)$ sind Magmen/Halbgruppen/Monoide/Gruppen? Welche davon sind kommutativ?
2. Sei $(S, \circ)$ eine endliche Halbgruppe mit $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ als Trägermenge und der rechtsstehenden Verknüpfungstafel für $\circ$.
   (a) Ist $(S, \circ)$ ein Monoid?
   (b) Ist $(S, \circ)$ eine Gruppe?
   (c) Ist $(S, \circ)$ kommutativ?
   Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	d	e	f	a	b	c
b	f	d	e	b	c	a
c	e	f	d	c	a	b
d	a	b	c	d	e	f
e	c	a	b	e	f	d
f	b	c	a	f	d	e

Lösung

1. - $(\mathbb{N}, +)$ ist ein kommutatives Monoid, aber keine Gruppe.
   - $(\mathbb{N}, -)$ ist weder ein Magma noch kommutativ.
   - $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
   - $(\mathbb{Z}, -)$ ist ein Magma, aber weder eine Halbgruppe noch kommutativ.
   - $(\mathbb{N}, \max)$ ist ein kommutatives Monoid, aber keine Gruppe.
   - $(\mathbb{N}, \min)$ ist eine kommutative Halbgruppe, aber kein Monoid.
   - $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist ein kommutatives Monoid, aber keine Gruppe.
   - $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe.
   - $(\{a, b\}^*, \cdot)$ ist ein Monoid, aber weder eine Gruppe noch kommutativ.
2. (a) Ja. Das neutrale Element ist d.
   (b) Ja. Die Inversen sind: $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$, $c^{-1} = c$, $d^{-1} = d$, $e^{-1} = f$ und $f^{-1} = e$.
   (c) Nein. Es gilt beispielsweise $a \circ b = e \neq f = b \circ a$.

Vorbereitungsaufgabe 2

Seien $(M, \circ)$ und $(N, \bullet)$ zwei Monoide mit neutralen Elementen 1_M und 1_N. Eine Funktion $\varphi\colon M \to N$ heißt *Monoid-Homomorphismus*, wenn gilt:

$$\varphi(1_M) = 1_N \qquad \text{und} \qquad \forall x, y \in M\colon \varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y).$$

Wenn klar ist, dass es sich bei $(M, \circ)$ und $(N, \bullet)$ um Monoide handelt, nennen wir φ auch einfach *Homomorphismus*.

1. Geben Sie einen Homomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ an.
2. Geben Sie einen Homomorphismus zwischen $(\{a, b\}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{N}, +)$ an.
3. Seien $(A, \cdot_A)$, $(B, \cdot_B)$ und $(C, \cdot_C)$ drei Monoide und $\varphi\colon A \to B$ und $\psi\colon B \to C$ zwei Homomorphismen. Zeigen Sie, dass die Funktion $\chi\colon A \to C$ mit $\chi(x) = \psi(\varphi(x))$ wieder ein Homomorphismus ist.

   Bemerkung: Man schreibt dann $\chi = \psi \circ \varphi$ („ψ nach φ“) und nennt χ die *Komposition* von φ und ψ.

Lösung

1. Wähle $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $\varphi(x) = a^x$ für ein beliebiges $a > 0$. Dann gilt $\varphi(0) = a^0 = 1$ und
$$\varphi(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

   Bemerkung: Für $a = 1$ erhält man den trivialen Homomorphismus $\varphi(x) = 1$.

2. Wähle $\varphi\colon \{a, b\}^* \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(w) = k|w_a| + l|w|_b$ für beliebige $k, l \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\varphi(\varepsilon) = k|\varepsilon|_a + l|\varepsilon|_b = 0 + 0 = 0$ und $\varphi(x \cdot y) = \varphi(xy) = k|xy|_a + l|xy|_b = k(|x|_a + |y|_a) + l(|x|_b + |y|_b) = k|x|_a + l|x|_b + k|y|_a + l|y|_b = \varphi(x) + \varphi(y)$ für alle $x, y \in \{a, b\}^*$.

   Bemerkung: Für $k = l = 1$ erhält man den deutlich intuitiveren Homomorphismus $\varphi(w) = |w|$ und für $k = l = 0$ erhält man den trivialen Homomorphismus $\varphi(w) = 0$.

3. Da φ und ψ Homomorphismen sind, gilt:

   (1) $\varphi(1_A) = 1_B$,

   (2) $\psi(1_B) = 1_C$,

   (3) $\varphi(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$ für alle $x, y \in A$ und

   (4) $\psi(x \cdot_A y) = \psi(x) \cdot_C \psi(y)$ für alle $x, y \in B$.

   Für χ folgt daraus $\chi(1_A) = \psi(\varphi(1_a)) \overset{(1)}{=} \psi(1_B) \overset{(2)}{=} 1_C$ und
$$\chi(x \cdot_A y) = \psi(\varphi(x \cdot_A y)) \overset{(3)}{=} \psi(\varphi(x) \cdot_B \varphi(y)) \overset{(4)}{=} \psi(\varphi(x)) \cdot_C \psi(\varphi(y)) = \chi(x) \cdot_C \chi(y)$$
für alle $x, y \in A$.

Vorbereitungsaufgabe 3

Eine Äquivalenzrelation $\sim$ heißt *Kongruenzrelation* auf ein Monoid $(S, \circ)$, wenn gilt:

$$\forall x, x', y, y' \in S\colon (x \sim x' \wedge y \sim y') \implies x \circ y \sim x' \circ y'.$$

Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $(S, \circ)$, dann ist $\bullet$ mit

$$[x]_\sim \bullet [y]_\sim = [x \circ y]_\sim$$

eine wohldefinierte Verknüpfung, die zusammen mit $S/{\sim}$ ein Monoid bildet, das sogenannte *Quotientenmonoid* $(S/{\sim}, \bullet)$. Wohldefiniert heißt in diesem Fall, dass das Ergebnis der Verknüpfung $[x]_\sim \bullet [y]_\sim$ nicht von der konkreten Wahl der Repräsentanten x und y abhängt.

Sei $\sim$ eine Relation auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y$ genau dann, wenn $x^2 = y^2$.

1. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist.
3. Zeigen Sie, dass $\sim$ keine Kongruenzrelation auf $(\mathbb{Z}, +)$ ist.

Bemerkungen:

- Oft verwendet man dasselbe Symbol für $\circ$ und $\bullet$, obwohl das formal zwei verschiedene Verknüpfungen sind.
- Kongruenzrelationen können auch für Magmen, Halbgruppen und Gruppen definiert werden. Die entstehende Struktur $(S/{\sim}, \bullet)$ wird dann entsprechend *Quotientenmagma*, *-halbgruppe* oder *-gruppe* genannt.

Lösung

1. Reflexivität

   Für jedes $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x^2 = x^2$. Somit ist $x \sim x$.

   Symmetrie

   Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ beliebig mit $x \sim y$. Dann gilt $x^2 = y^2$ und folglich auch $y^2 = x^2$. Somit ist $y \sim x$.

   Transitivität

   Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ beliebig mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gilt $x^2 = y^2$ und $y^2 = z^2$ und folglich auch $x^2 = y^2 = z^2$. Somit ist $x \sim z$.

   Bemerkung: Man erkennt, dass dieser Beweis völlig analog zu dem Beweis aus Aufgabe 2, Teil 1 (b) auf Ergänzungsblatt 6 funktioniert. Tatsächlich ist eine Relation $\sim$ auf einer Menge S mit

   $$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

   für jede Funktion f mit Definitionsbereich S eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind dann genau die Urbilder.

2. Seien $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$ mit $x \sim x'$ und $y \sim y'$, d. h. $x^2 = x'^2$ und $y^2 = y'^2$. Dann gilt:

$$(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = x'^2 \cdot y'^2 = (x' \cdot y')^2.$$

   Somit ist $x \cdot y \sim x' \cdot y'$.

3. Man sieht, dass der Beweis aus Teilaufgabe 2 mit $+$ statt $\cdot$ nicht funktioniert, da die Gleichung $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ im Allgemeinen falsch ist. Dies ist jedoch noch kein Beweis dafür, dass $\sim$ keine Kongruenzrelation auf $(\mathbb{Z}, +)$ ist. Es zeigt jediglich, dass dieser eine Ansatz fehlschlägt.

   Wir zeigen, dass $\sim$ keine Kongruenzrelation auf $(\mathbb{Z}, +)$ ist, indem wir Elemente $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$ mit $x \sim x'$, $y \sim y'$ und $x \cdot x' \not\sim y \cdot y'$ angeben.

   <u>Beweis</u>

   Seien $x = x' = y = 1$ und $y' = -1$. Dann gilt $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$, $x \sim x'$ und $y \sim y'$. Wegen

$$(x + x')^2 = 4 \neq 0 = (y + y')^2$$

   gilt jedoch $x \cdot x' \not\sim y \cdot y'$. $\square$

   An diesem Beispiel erkennt man den Sinn der obigen Definition einer Kongruenzrelation. Man kann keine Verknüpfung der Art

$$[x]_\sim + [y]_\sim = [x + y]_\sim$$

   auf der Quotientenmenge $\mathbb{Z}/\sim$ definieren. Diese wäre nämlich nicht wohldefiniert, da das Ergebnis $[x + y]_\sim$ der Verknüpfung abhängig von der Wahl der Repräsentanten x und y wäre.

Vorbereitungsaufgabe 4

Beantworten Sie folgende Fragen:

1. Welche Charakterisierungen von regulären Sprachen kennen wir?
2. Unter welchen Operationen ist die Klasse der regulären Sprachen abgeschlossen?

Lösung

1. Wir kennen 7 Charakterisierungen. Für eine Sprache L über einem Alphabet Σ gilt:

$$\begin{aligned} L \text{ regulär } &\iff \text{es gibt eine Typ-3-Grammatik } G \text{ mit } L(G) = L \\ &\iff \text{es gibt einen DEA } M \text{ mit } T(M) = L \\ &\iff \text{es gibt einen NEA } M \text{ mit } T(M) = L \\ &\iff \text{es gibt einen regulären Ausdruck } \gamma \text{ mit } L(\gamma) = L \\ &\iff \text{es gibt ein endliches Monoid } M\text{, eine Menge } A \subseteq M \text{ und} \\ &\ \text{einen Homomorphismus } \varphi\colon \Sigma^* \to M \text{ mit } L = \varphi^{-1}(A) \\ &\iff |\Sigma^*/R_L| < \infty \\ &\iff |\Sigma^*/{\equiv_L}| < \infty \end{aligned}$$

   Erinnerung: Da $\equiv_L$ eine Verfeinerung von R_L ist, gilt immer $|\Sigma^*/R_L| \leq |\Sigma^*/{\equiv_L}|$.

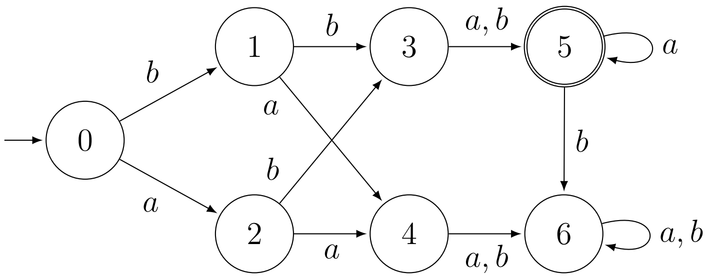
2. Die Klasse der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter Komplement, Kleene-Stern, Vereinigung, Schnitt, Konkatenation, Homomorphismen und inversen Homomorphismen.

   Bemerkung: Die ersten fünf Abschlusseigenschaften wurden in der Vorlesung behandelt, die letzten zwei in den Hausaufgaben.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Sei M der folgende DEA:



1. Führen Sie den in Einheit 16 vorgestellten Minimierungsalgorithmus durch.

   Anstatt nicht äquivalente Zustände (bezüglich der Myhill-Nerode-Äquivalenz R_L) zu markieren, soll ein Zeuge eingetragen werden, der die Inäquivalenz der Zustände belegt.

   Formal ist ein Wort $w \in \Sigma^*$ ein Zeuge für die Inäquivalenz von p und q, falls gilt:

$$\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \notin F.$$

   Tragen Sie in jedes Feld einen Zeugen minimaler Länge ein oder schreiben Sie „R_L“, falls die Zustände äquivalent sind.

2. Wie sieht der resultierende minimale DEA aus?

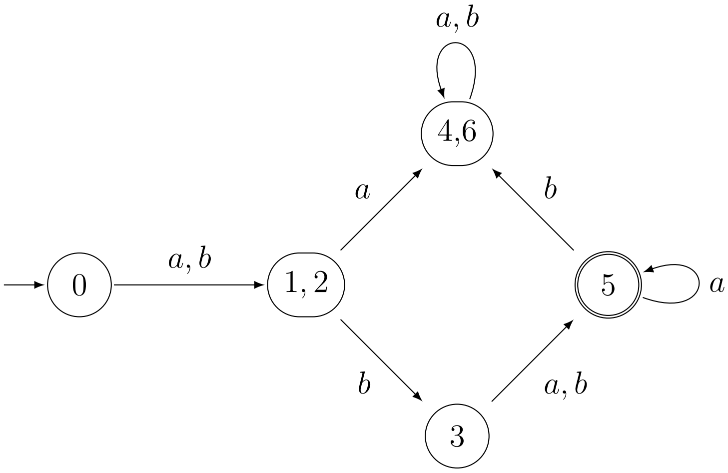
3. Geben Sie einen regulären Audruck γ mit $L(\gamma) = T(M)$ an.

Lösung

1.

	0	1	2	3	4	5
1	ba					
2	ba	R_L				
3	a	a	a			
4	aba	ba	ba	a		
5	ε	ε	ε	ε	ε	
6	aba	ba	ba	a	R_L	ε

2.



3. $\gamma = (a|b)b(a|b)a^*$

Präsenzaufgabe 2

Seien $(\Sigma^*, \cdot)$ das freie Monoid über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit der Konkatenation von Wörtern als Verknüpfung und $(M, \cdot)$ ein Monoid mit der Trägermenge $M = \{-1, 0, 1\}$ und der gewöhnlichen Multiplikation auf Zahlen als Verknüpfung.

Wir betrachten den Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma^* \to M$, der durch $\varphi(a) = -1$, $\varphi(b) = 0$ und $\varphi(c) = 1$ eindeutig definiert ist.

1. Geben Sie die Verknüpfungstafel von $(M, \cdot)$ an. Warum ist $(M, \cdot)$ ein Monoid? Ist $(M, \cdot)$ eine Gruppe?
2. Geben Sie eine Formel für $\varphi(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$ an.
3. Welche Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ werden von $(M, \cdot)$ mit φ erkannt?

Lösung

1.

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

   $(M, \cdot)$ ist ein Monoid, da M unter $\cdot$ abgeschlossen ist (s. Verknüpfungstafel), $\cdot$ assoziativ ist und 1 ein neutrales Element ist.

   $(M, \cdot)$ ist keine Gruppe, da 0 kein Inverses besitzt.

2. Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:
$$\varphi(w) = \begin{cases} 0 & \text{für } |w|_b \geq 1 \\ (-1)^{|w|_a} & \text{für } |w|_b = 0. \end{cases}$$

3. Für jede Teilmenge A von M wird $L = \varphi^{-1}(A)$ von $(M, \cdot)$ mit φ erkannt. Weil M genau 8 Teilmengen besitzt, sind es genau folgende 8 Sprachen:
$$\begin{aligned}
&\varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \\
&\varphi^{-1}(\{-1\}) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b = 0 \wedge |w|_a \text{ ungerade}\} \\
&\varphi^{-1}(\{0\}) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b \geq 1\} \\
&\varphi^{-1}(\{1\}) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b = 0 \wedge |w|_a \text{ gerade}\} \\
&\varphi^{-1}(\{-1, 0\}) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b \geq 1 \vee |w|_a \text{ ungerade}\} \\
&\varphi^{-1}(\{-1, 1\}) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b = 0\} = \{a, c\}^* \\
&\varphi^{-1}(\{0, 1\}) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b \geq 1 \vee |w|_a \text{ gerade}\} \\
&\varphi^{-1}(M) = \Sigma^*
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 3

Seien R_L die Myhill-Nerode-Äquivalenz und $\equiv_L$ die syntaktische Kongruenz. Bekanntlich sind R_L und $\equiv_L$ Äquivalenzrelationen.

1. Zeigen Sie, dass R_L im Allgemeinen keine Kongruenzrelation auf $(\Sigma^*, \cdot)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\equiv_L$ eine Kongruenzrelation auf $(\Sigma^*, \cdot)$ ist.
3. Warum ist die auf Folie 16.7 definierte Funktion $\varphi\colon \Sigma^* \to \mathrm{Synt}(L)$ mit $\varphi(w) = [w]_{\equiv_L}$ ein Monoid-Homomorphismus?
4. Seien nun $L = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ und $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie Quotientenmenge und Index von $\equiv_L$ sowie die Verknüpfungstafel von $(\mathrm{Synt}(L), \cdot)$ an. Warum wird L von $\mathrm{Synt}(L)$ erkannt?

Erinnerung: $\mathrm{Synt}(L) = \Sigma^*/\equiv_L$.

Lösung

1. Für $L = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ gilt beispielsweise $b \, R_L \, b$ und $b \, R_L \, ab$, aber $bb \not R_L \, bab$.
2. Seien $x, x'y, y' \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \equiv_L x'$ und $y \equiv_L y'$. Dann gilt für beliebige $u, u', v, v' \in \Sigma^*$:

$$(1) \; uxv \in L \iff ux'v \in L \qquad \text{und} \qquad (2) \; uyv \in L \iff uy'v \in L.$$

Zu zeigen ist $xy \equiv_L x'y'$. Seien nun $u'', v'' \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$$uxyv \in L \overset{(1)}{\iff} ux'yv \in L \overset{(2)}{\iff} ux'y'v \in L.$$

3. Weil $\varphi(\varepsilon) = [\varepsilon]_{\equiv_L}$ und

$$\varphi(x \cdot y) = [x \cdot y]_{\equiv_L} = [x]_{\equiv_L} \cdot [y]_{\equiv_L} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt.

4. Es gilt:
   - $[\varepsilon]_{\equiv_L} = \{\varepsilon\}$,
   - $[a]_{\equiv_L} = \{a^m \mid m \geq 1\}$,
   - $[b]_{\equiv_L} = \{b^n \mid n \geq 1\}$,
   - $[ab]_{\equiv_L} = \{a^m b^n \mid m, n \geq 1\}$ und
   - $[ba]_{\equiv_L} = \{ubav \mid u, v \in \Sigma^*\}$,

   d. h. $\Sigma^*/{\equiv_L} = \{[\varepsilon]_{\equiv_L}, [a]_{\equiv_L}, [b]_{\equiv_L}, [ab]_{\equiv_L}, [ba]_{\equiv_L}\}$ mit $|\Sigma^*/{\equiv_L}| = 5$.

   Für die Verknüpfungstafel schreiben wir der Übersichtlichkeit halber vereinfacht nur w statt $[w]_{\equiv_L}$, d. h. wir rechnen mit Vertretern:

$\cdot$	ε	a	b	ab	ba
ε	ε	a	b	ab	ba
a	a	a	ab	ab	ba
b	b	ba	b	ba	ba
ab	ab	ba	ab	ba	ba
ba	ba	ba	ba	ba	ba

Präsenzaufgabe 4

Sei L eine reguläre Sprache über einem Alphabet Σ. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L' = \{w \mid ww \in L\}$$

auch regulär ist.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Vereinigung endlich vieler regulärer Sprachen wieder regulär ist und dass für jeden DEA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ die Sprache

$$L_{p,q} = \left\{ w \in \Sigma^* \,\middle|\, \hat{\delta}(p, w) = q \right\}$$

für alle $p, q \in Q$ regulär ist.

Lösung

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA für L. Dieser existiert, da L regulär ist. Dann gilt für jedes $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} w \in L' &\iff ww \in L \\ &\iff \hat{\delta}(s, ww) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(s, w), w) \in F \\ &\iff \exists q \in Q, f \in F\colon (\hat{\delta}(s, w) = q \wedge \hat{\delta}(q, w) = f) \\ &\iff w \in \bigcup_{q \in Q, f \in F} (L_{s,q} \cap L_{q,f}), \end{aligned}$$

d. h. $L' = \bigcup_{q \in Q, f \in F} (L_{s,q} \cap L_{q,f})$. Da $L_{p,q}$ für alle $p, q \in Q$ regulär ist und die Klasse der regulären Sprachen abgeschlossen ist unter Schnitt und endlicher Vereinigung folgt, dass L' auch regulär ist.

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Aus Ergänzung 6 wissen wir, dass die Kongruenzrelation modulo n eine Äquivalenzrelation ist. Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass die Kongruenzrelation modulo n sowohl auf $(\mathbb{Z}, +)$ als auch auf $(\mathbb{Z}, \cdot)$ eine Kongruenzrelation ist.

Lösung

Seien $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$ beliebig mit $x \equiv x' \mod n$ und $y \equiv y' \mod n$. Dann gibt es Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $x = x' + kn$ und $y = y' + ln$. Zu zeigen ist nun (1) $x + x' \equiv y + y' \mod n$ und (2) $xx' \equiv yy' \mod n$.

(1) <u>Zu zeigen</u>: $\exists m \in \mathbb{Z}\colon x + y = x' + y' + mn$.

Wähle $m = k + l$. Dann ist $m \in \mathbb{Z}$ und es gilt:

$$x + y = x' + kn + y' + ln = x' + y' + (k + l)n = x' + y' + mn.$$

(2) <u>Zu zeigen</u>: $\exists m \in \mathbb{Z}\colon xy = x'y' + mn$.

Wähle $m = x'l + y'k + kln$. Dann ist $m \in \mathbb{Z}$ und es gilt:

$$xy = (x' + kn)(y' + ln) = x'y' + (x'l + y'k + kln)n = x'y' + mn.$$

Zusatzaufgabe 2

Seien $(\Sigma^*, \cdot)$ das freie Monoid über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit der Konkatenation von Wörtern als Verknüpfung und $(M, \min)$ ein Monoid mit der Trägermenge $M = \{1, 2, 3\}$ und der Minimum-Operation

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq y \\ y & \text{sonst} \end{cases}$$

als Verknüpfung.

Wir betrachten den Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma^* \to M$, der durch $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 2$ und $\varphi(c) = 3$ eindeutig definiert ist.

1. Geben Sie die Verknüpfungstafel von $(M, \min)$ an. Warum ist $(M, \min)$ ein Monoid? Ist $(M, \min)$ eine Gruppe?
2. Geben Sie eine Formel für $\varphi(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$ an.
3. Welche Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ werden von $(M, \min)$ mit φ erkannt?

Lösung

1.

min	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

   $(M, \min)$ ist ein Monoid, da M unter min abgeschlossen ist (s. Verknüpfungstafel), min assoziativ ist und 3 ein neutrales Element ist.

   $(M, \min)$ ist keine Gruppe, da weder 1 noch 2 ein Inverses besitzen.

2. Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\varphi(w) = \begin{cases} 1 & \text{für } |w|_a \geq 1 \\ 2 & \text{für } |w|_a = 0 \text{ und } |w|_b \geq 1 \\ 3 & \text{für } |w|_a = |w|_b = 0. \end{cases}$$

   Man beachte, dass hiermit auch abgedeckt wird, dass das neutrale Element $\varepsilon \in \Sigma^*$ auf das neutrale Elemente $3 \in M$ abgebildet wird, was bei Homomorphismen der Fall sein soll.

3. Für jede Teilmenge A von M wird $L = \varphi^{-1}(A)$ von $(M, \min)$ mit φ erkannt. Weil

M genau 8 Teilmengen besitzt, sind es genau folgende 8 Sprachen:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset\\
&\varphi^{-1}(\{1\}) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \geq 1\}\\
&\varphi^{-1}(\{2\}) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 0 \wedge |w|_b \geq 1\}\\
&\varphi^{-1}(\{3\}) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b = 0\}\\
&\varphi^{-1}(\{1,2\}) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \geq 1 \vee |w|_b \geq 1\}\\
&\varphi^{-1}(\{1,3\}) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \geq 1 \vee |w|_a = |w|_b = 0\}\\
&\varphi^{-1}(\{2,3\}) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 0\}\\
&\varphi^{-1}(M) = \Sigma^*
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 3

Seien Σ und Γ zwei Alphabete, $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus, A eine Sprache über Σ und B eine Sprache über Γ. Aus den Übungsblättern kennen wir folgende Abschlusseigenschaften:

$$A \text{ regulär} \implies \varphi(A) \text{ regulär} \qquad \text{und} \qquad B \text{ regulär} \implies \varphi^{-1}(B) \text{ regulär.}$$

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrungen:

1. $\varphi(A)$ regulär $\implies$ A regulär
2. $\varphi^{-1}(B)$ regulär $\implies$ B regulär

Lösung

1. Wir widerlegen die Aussage mit einem Gegenbeispiel. Für die Sprache $A = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ und den Homomorphismus $\varphi\colon \{a,b\}^* \to \{a\}^*$ mit $\varphi(a) = \varepsilon(b) = a$ ist $\varphi(A) = L((aa)^*)$ regulär, aber A nicht.
2. Wir zeigen die Aussage durch einen kurzen Beweis. Sei $\varphi^{-1}(B)$ regulär. Da die Klasse der regulären Sprachen abgeschlossen unter Homomorphismen ist, ist auch $\varphi(\varphi^{-1}(B)) = B$ regulär.

Erinnerung: Für eine Funktion $f\colon A \to B$ und Teilmengen $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ gilt $f(f^{-1}(B')) = B'$ und $f^{-1}(f(A')) \supseteq A'$. Wichtig: Im Allgemeinen gilt jedoch nicht $f^{-1}(f(A')) \subseteq A'$.

Zusatzaufgabe 4

Zeigen Sie, dass jede endliche Sprache regulär ist.

Lösung

Sei $L = \{w_1, \ldots, w_n\}$ eine endliche Sprache. Dann wird L von dem regulären Ausdruck $\gamma = w_1 | \ldots | w_n$ beschrieben. Aus dem Satz von Kleene folgt, dass L regulär ist.

Zusatzaufgabe 5

Zeigen Sie mithilfe der Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen, dass folgende Sprachen nicht regulär sind.

1. $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
2. $L_2 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$

Verwenden Sie insbesondere weder das Pumping-Lemma noch den Satz von Myhill-Nerode. Sie dürfen jedoch verwenden, dass $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ nicht regulär ist.

Lösung

1. Angenommen, L wäre regulär. Dann ist auch

   $$L \cap L(aa^*bb^*) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

   regulär. Widerspruch!

2. Angenommen, L wäre regulär. Betrachte den Homomorphismus $\varphi\colon \{a,b,c\}^* \to \{a,b\}^*$, der durch $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$ und $\varphi(c) = \varepsilon$ definiert ist. Da die Klasse der regulären Sprachen unter Homomorphismen abgeschlossen ist, ist auch

   $$\varphi(L) = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$$

   regulär. Widerspruch!