Lösungen zum Ergänzungsblatt 6

Erinnerung:

Die Besprechungstermine für die Ergänzungen 7 bis 10 fallen bis auf Weiteres aus. Aufgaben, Lösungen und Videos mit Erklärungen werden wie gewohnt über die Ergänzungswebseite zur Verfügung gestellt.

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Das Pumping-Lemma besagt, dass jede reguläre Sprache L über einem Alphabet Σ eine gewisse Eigenschaft $P(L)$ besitzt. Intuitiv besagt $P(L)$, dass jedes Wort aus L, das lang genug ist, sich innerhalb von L beliebig auf- und abpumpen lässt.

Formal hat $P(L)$ die Form:

$$\boxed{}\, n \in \mathbb{N}\colon \boxed{}\, x \in L, |x| \geq n\colon \boxed{}\, u, v, w \in \Sigma^*, x = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n\colon \boxed{}\, i \in \mathbb{N}\colon \boxed{}.$$

1. Füllen Sie die leeren Felder so aus, dass die entstehende Aussage äquivalent zur
   (a) Eigenschaft $P(L)$ ist.
   (b) Negation $\neg P(L)$ der Eigenschaft $P(L)$ ist.
2. Kann man etwas über die Regularität einer Sprache L sagen, wenn $P(L)$
   (a) erfüllt ist?
   (b) nicht erfüllt ist?

Lösung

1. (a) $\boxed{\exists}\, n \in \mathbb{N}\colon \boxed{\forall}\, x \in L, |x| \geq n\colon \boxed{\exists}\, u, v, w \in \Sigma^*, x = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n\colon$
   $\boxed{\forall}\, i \in \mathbb{N}\colon \boxed{uv^iw \in L}$
   (b) $\boxed{\forall}\, n \in \mathbb{N}\colon \boxed{\exists}\, x \in L, |x| \geq n\colon \boxed{\forall}\, u, v, w \in \Sigma^*, x = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n\colon$
   $\boxed{\exists}\, i \in \mathbb{N}\colon \boxed{uv^iw \notin L}$
2. (a) Nichts. L kann regulär sein oder auch nicht.
   (b) L ist dann mit Sicherheit nicht regulär.

Vorbereitungsaufgabe 2

Eine binäre Relation $\sim$ auf einer Menge S heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie (1) *reflexiv*, (2) *symmetrisch* und (3) *transitiv* ist, d. h.:

(1) $\forall x \in S\colon x \sim x$

(2) $\forall x, y \in S\colon (x \sim y \implies y \sim x)$

(3) $\forall x, y, z \in S\colon ((x \sim y \wedge y \sim z) \implies x \sim z)$

Seien Σ ein Alphabet und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

1. Zeigen Sie, dass folgende Relationen $\sim$ Äquivalenzrelationen sind.
   (a) $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y \iff x \equiv y \mod n$.
   (b) $\sim$ auf Σ^* mit $x \sim y \iff |x| = |y|$.
2. Zeigen Sie, dass folgende Relationen $\sim$ keine Äquivalenzrelationen sind.
   (a) $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z}\colon y = kx$.
   (b) $\sim$ auf Σ^* mit $x \sim y \iff \exists u, v \in \Sigma^*\colon y = uxv$.

   Bemerkung: Es geht hier um (a) die Teilbarkeitsrelation und (b) die Infix-Relation.

Lösung

1. (a) Reflexivität

   Sei $x \in \mathbb{Z}$ beliebig. Wähle $k = 0$. Dann ist $k \in \mathbb{Z}$ und es gilt: $x = x + kn$. Somit ist $x \sim x$.

   Symmetrie

   Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ beliebig mit $x \sim y$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + kn$ Wähle $k' = -k$. Dann ist $k' \in \mathbb{Z}$ und es gilt: $y = x + k'n$. Somit ist $y \sim x$.

   Transitivität

   Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ beliebig mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann existieren Zahlen $k, k' \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + kn$ und $y = z + k'n$. Wähle $k'' = k' + k$. Dann ist $k'' \in \mathbb{Z}$ und es gilt: $x = y + kn = z + k'n + kn = z + (k' + k)n$. Somit ist $x \sim z$.

   (b) Reflexivität

   Für jedes $x \in \Sigma^*$ gilt $|x| = |x|$. Somit ist $x \sim x$.

   Symmetrie

   Seien $x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \sim y$. Dann gilt $|x| = |y|$ und folglich auch $|y| = |x|$. Somit ist $y \sim x$.

   Transitivität

   Seien $x, y, z \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gilt $|x| = |y|$ und $|y| = |z|$ und folglich auch $|x| = |y| = |z|$. Somit ist $x \sim z$.

2. Beide Relationen sind zwar reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch. Wir widerlegen die Symmetrie jeweils mit einem Gegenbeispiel.
   (a) 1 teilt 0, weil $0 = k \cdot 1$ für $k = 0$ gilt. 0 teilt jedoch nicht 1, da $k \cdot 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gleich 0 und somit nicht 1 ist.
   (b) Da Alphabete nichtleer sind, existiert ein Buchstabe $a \in \Sigma$. ε ist Infix von a, weil $a = u\varepsilon v$ für $u = a$ und $v = \varepsilon$ gilt. a ist jedoch kein Infix von ε, da keine Wörter $u, v \in \Sigma^*$ existieren mit $\varepsilon = uav$.

Vorbereitungsaufgabe 3

Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf S und x ein beliebiges Element aus S, dann heißt $[x]_\sim := \{y \in S \mid x \sim y\}$ die *Äquivalenzklasse* von x bezüglich $\sim$. Für beliebige $x, y \in S$ gilt dann:

$$x \sim y \iff [x]_\sim = [y]_\sim.$$

Die Menge $S/{\sim} := \{[x]_\sim \mid x \in S\}$ aller Äquivalenzklassen heißt *Quotientenmenge* oder *Faktormenge* und bildet eine *Partition* von S, d. h. jedes Element aus S ist in genau einer Äquivalenzklasse enthalten. Die Mächtigkeit $|S/{\sim}|$ der Quotientenmenge wird *Index* von $\sim$ genannt und gelegentlich mit $\text{Index}(\sim)$ notiert.

Bestimmen Sie Quotientenmenge und Index der folgenden Äquivalenzrelationen:

1. $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y \iff x \equiv y \mod 3$
2. $\sim$ auf $\{a, b\}^*$ mit $x \sim y \iff |x| = |y|$

Lösung

1. $\sim$ besitzt folgende drei Äquivalenzklassen:
   - $[0]_\sim = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$
   - $[1]_\sim = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\} = \{1 + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$
   - $[2]_\sim = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} = \{2 + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

   Somit gilt $S/{\sim} = \{[0]_\sim, [1]_\sim, [2]_\sim\}$ und $\text{Index}(\sim) = |S/{\sim}| = 3$.
2. Da Wörter genau dann äquivalent sind, wenn sie dieselbe Länge haben, ist die Äquivalenzklasse eines Wortes x die Menge aller Wörter, die gleich lang sind wie x, d. h. $[x]_\sim = \{y \in \Sigma^* \mid |x| = |y|\} = \Sigma^{|x|}$. Somit gilt $S/{\sim} = \left\{\Sigma^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ und $\text{Index}(\sim) = |S/{\sim}| = \infty$.

Bemerkung: In der ersten Teilaufgabe wird die Grundmenge in endlich viele unendlich große Äquivalenzklassen partitioniert. In der zweiten Teilaufgabe sind es unendlich viele endlich große Äquivalenzklassen.

Vorbereitungsaufgabe 4

Seien Σ ein Alphabet, L eine Sprache über Σ und $x, y \in \Sigma^*$ zwei beliebige Wörter. Füllen Sie die leeren Kästchen so aus, dass die entstehende Aussage wahr ist.

1. $x \, R_L \, y \iff \boxed{} w \in \Sigma^* \colon \Big(\boxed{} \iff \boxed{} \Big)$
2. $x \, \not{R}_L \, y \iff \boxed{} w \in \Sigma^* \colon \Big(\Big(\boxed{} \land \boxed{} \Big) \lor \Big(\boxed{} \land \boxed{} \Big) \Big)$

Hinweis: $x \, \not{R}_L \, y$ besagt, dass x und y nicht in Relation bezüglich R_L stehen.

Lösung

1. $x \, R_L \, y \iff \boxed{\forall} w \in \Sigma^* \colon \Big(\boxed{xw \in L} \iff \boxed{yw \in L} \Big)$
2. $x \, \not{R}_L \, y \iff \boxed{\exists} w \in \Sigma^* \colon \Big(\Big(\boxed{xw \in L} \land \boxed{yw \notin L} \Big) \lor \Big(\boxed{xw \notin L} \land \boxed{yw \in L} \Big) \Big)$

Vorbereitungsaufgabe 5

Für Äquivalenzrelationen $\sim, \sim'$ auf einer Menge S heißt $\sim'$ *Verfeinerung* von $\sim$, falls:

$$\forall x, y \in S \colon (x \sim' y \implies x \sim y).$$

In diesem Fall ist jede Äquivalenzklasse bezüglich $\sim'$ vollständig in einer Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ enthalten und es gilt folglich $|S/{\sim}| \leq |S/{\sim'}|$.

Seien nun $\sim$ und $\sim'$ Äquivalenzrelationen auf $\{a, b\}^*$ mit

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff |x| = |y| \\ x \sim' y &\iff (|x|_a = |y|_a \land |x|_b = |y|_b). \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, das $\sim'$ eine Verfeinerung von $\sim$ ist.
2. Listen Sie alle Elemente von $[aab]_\sim$ auf.
3. Welche Äquivalenzklassen bezüglich $\sim'$ enthält $[aab]_\sim$?

Lösung

1. Seien $x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \sim' y$, d. h. $|x|_a = |y|_a$ und $|x|_b = |y|_b$. Dann gilt $|x| = |x|_a + |x|_b = |y|_a + |y|_b = |y|$, d. h. $x \sim y$.
2. $[aab]_\sim = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$
3. $[aab]_\sim$ enthält die Klassen
   - $[aaa]_{\sim'} = \{aaa\}$,
   - $[aab]_{\sim'} = \{aab, aba, baa\}$,
   - $[abb]_{\sim'} = \{abb, bab, bba\}$ und
   - $[bbb]_{\sim'} = \{bbb\}$.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Zeigen Sie, dass keine der folgenden Sprachen L über dem entsprechenden Alphabet Σ regulär ist. Verwenden Sie das Pumping-Lemma.

1. $L = \{a^k b^l a^k b^l \in \Sigma^* \mid k, l \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$
2. $L = \{a^{3^m} \mid m \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a\}$
3. $L = \{a^k b^l \mid k < l\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$
4. $L = \{a^k b^l c^m \in \Sigma^* \mid k + l = m\}$ über $\Sigma = \{a, b, c\}$

Lösung

Wir zeigen, dass L die Eigenschaft des Pumping-Lemmas nicht besitzt, d. h.:

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon \exists x \in L, |x| \geq n \colon \forall u, v, w \in \Sigma^*, x = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n \colon \exists i \in \mathbb{N} \colon uv^i w \notin L.$$

Daraus folgt sofort, dass L nicht regulär sein kann.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^n b a^n b$. Dann gilt $x \in L$ und $|x| = 2n + 2 \geq n$. Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ beliebig mit (1) $x = uvw$, (2) $|uv| \leq n$ und (3) $|v| \geq 1$. Wähle nun $i = 0$. Aus (1) und (2) folgt $v = a^j$ für ein $j \in \mathbb{N}$ und somit $uv^i w = a^{n-j} b a^n b$ mit $j > 0$ nach (3). Wegen $n - j < n$ ist $uv^i w \notin L$. □

   Bemerkung: Für $i \geq 2$ funktioniert die Argumentation analog.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^{3^n}$. Dann gilt $x \in L$ und $|x| = 3^n \geq n$. Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ beliebig mit (1) $x = uvw$, (2) $|uv| \leq n$ und (3) $|v| \geq 1$. Wähle nun $i = 0$. Aus (1) folgt $v = a^j$ für ein $j \in \mathbb{N}$ und somit $uv^i w = a^{3^n - j}$ mit $1 \leq j \leq n$ nach (2) und (3). Wegen

   $$3^{n-1} = 3^n - 2 \cdot 3^{n-1} \overset{(*)}{<} 3^n - n \leq 3^n - j \leq 3^n - 1 < 3^n$$

   liegt $3^n - j$ echt zwischen 3^{n-1} und 3^n. Da die Funktion $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = 3^n$ monoton wachsend ist, kann $3^n - j$ keine Dreierpotenz sein, d. h. $uv^i w \notin L$. □

   $(*)$ Die Ungleichung $n < 2 \cdot 3^{n-1}$ kann für alle $n \in \mathbb{N}$ per Induktion gezeigt werden:

   <u>Induktionsanfang</u>

   Für $n = 0$ gilt $n = 0 < \frac{2}{3} = 2 \cdot 3^{n-1}$.

   <u>Induktionsschritt</u>

   Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Angenommen, es gilt $n < 2 \cdot 3^{n-1}$ (IV). Zu zeigen ist dann: $n + 1 < 2 \cdot 3^n$. Aus $1 \leq 3^n = 3 \cdot 3^{n-1} \leq 4 \cdot 3^{n-1}$ folgt:

   $$n + 1 \overset{\text{IV}}{<} 2 \cdot 3^{n-1} + 1 \leq 2 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1} = 6 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n.$$

   Bemerkung: Für $i \geq 2$ funktioniert die Argumentation analog.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^n b^{n+1}$. Dann gilt $x \in L$ und $|x| = 2n+1 \geq n$. Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ beliebig mit (1) $x = uvw$, (2) $|uv| \leq n$ und (3) $|v| \geq 1$. Wähle nun $i = 2$. Aus (1) und (2) folgt $v = a^j$ für ein $j \in \mathbb{N}$ und somit $uv^iw = a^{n+j}b^{n+1}$ mit $j > 0$ nach (3). Wegen $n + j \geq n + 1$ ist $uv^iw \notin L$. □

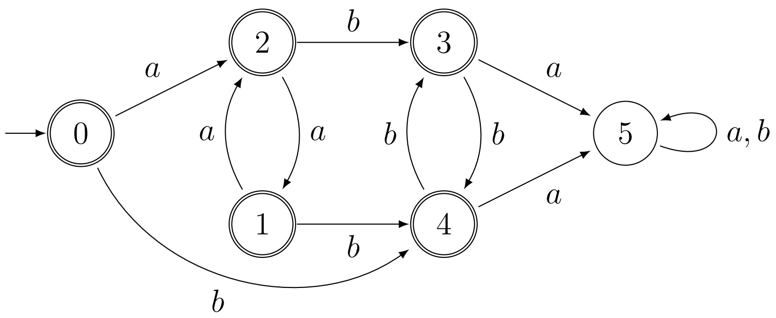
   Bemerkung: Für $i \geq 3$ funktioniert die Argumentation identisch.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^n c^n$. Dann gilt $x \in L$ und $|x| = 2n \geq n$. Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ beliebig mit (1) $x = uvw$, (2) $|uv| \leq n$ und (3) $|v| \geq 1$. Wähle nun $i = 0$. Aus (1) und (2) folgt $v = a^j$ für ein $j \in \mathbb{N}$ und somit $uv^iw = a^{n-j}c^n$ mit $j > 0$ nach (3). Wegen $n - j < n$ ist $uv^iw \notin L$. □

   Bemerkung: Für $i \geq 2$ funktioniert die Argumentation analog.

Präsenzaufgabe 2

Sei M der folgende DEA und L die von M akzeptierte Sprache.



1. Geben Sie L an.
2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

   (a) $aab\, R_L\, abb$ (c) $bab\, R_L\, aba$ (e) $\varepsilon\, R_L\, aa$

   (b) $ab\, R_L\, ba$ (d) $\varepsilon\, R_L\, bba$ (f) $bb\, R_L\, \varepsilon$

3. Geben Sie Quotientenmenge und Index der Myhill-Nerode-Relation R_L an.
4. Geben Sie den Myhill-Nerode-Automat grafisch an.
5. Geben Sie Quotientenmenge und Index der Relation R_M an.

Lösung

1. $L = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.
2. (a) Wahr. Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $aabw \in L \iff w \in \{b\}^* \iff abbw \in L$.

   (b) Falsch. Für $w = \varepsilon$ gilt $abw = ab \in L$ und $baw = ba \notin L$.

   (c) Wahr. Für alle $w \in \Sigma^*$ sind die Aussagen $babw \in L$ und $abaw \in L$ beide falsch und somit äquivalent.

   (d) Falsch. Für $w = \varepsilon$ gilt $\varepsilon w = \varepsilon \in L$ und $bbaw = bba \notin L$.

(e) Wahr. Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $\varepsilon w \in L \iff w \in L \iff aaw \in L$.

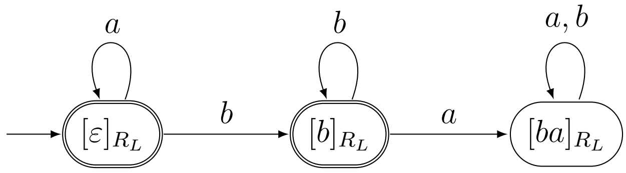
(f) Falsch. Für $w = a$ gilt $bbw = bba \notin L$ und $\varepsilon w = a \in L$.

3. $\Sigma^*/R_L = \{[\varepsilon]_{R_L}, [b]_{R_L}, [ba]_{R_L}\}$ mit

   - $[\varepsilon]_{R_L} = \{a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$,
   - $[b]_{R_L} = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1\}$ und
   - $[ba]_{R_L} = \{w \in \Sigma^* \mid ba \text{ ist Infix von } w\}$,

   d. h. $\mathrm{Index}(R_L) = |\Sigma^*/R_L| = 3$.

4.



5. $\Sigma^*/R_M = \{[\varepsilon]_{R_M}, [a]_{R_M}, [aa]_{R_M}, [b]_{R_M}, [bb]_{R_M}, [ba]_{R_M}\}$ mit

   - $[\varepsilon]_{R_M} = \{\varepsilon\}$,
   - $[a]_{R_M} = \{a^m \mid m \text{ ungerade}\}$,
   - $[aa]_{R_M} = \{a^m \mid m \geq 1 \wedge m \text{ gerade}\}$,
   - $[b]_{R_M} = \{a^m b^n \mid n \geq 1 \wedge m + n \text{ ungerade}\}$,
   - $[bb]_{R_M} = \{a^m b^n \mid n \geq 1 \wedge m + n \text{ gerade}\}$ und
   - $[ba]_{R_M} = \{w \in \Sigma^* \mid ba \text{ ist Infix von } w\}$,

   d. h. $\mathrm{Index}(R_M) = |\Sigma^*/R_M| = 6$.

   Bemerkung: Man erkennt, dass $[\varepsilon]_{R_L} = [\varepsilon]_{R_M} \cup [a]_{R_M} \cup [aa]_{R_M}$, $[b]_{R_L} = [b]_{R_M} \cup [bb]_{R_M}$ und $[ba]_{R_L} = [ba]_{R_M}$ gilt.

Präsenzaufgabe 3

Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Myhill-Nerode, dass die Sprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht regulär ist.

Lösung

Beweisstrategie

Wir zeigen die Existenz unendlich vieler Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen, indem wir für eine unendliche Menge $M \subseteq \Sigma^*$ folgende Aussage zeigen:

$$\forall x, y \in M\colon (x \neq y \implies [x]_{R_L} \neq [y]_{R_L})$$

Der eigentliche Beweis

Sei $M = \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt $M \subseteq \Sigma^*$ und $|M| = \infty$. Seien nun $x, y \in M$ beliebig mit $x \neq y$. Dann existieren $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, $x = a^i$ und $y = a^j$. Für $w = b^i$ ist $xw \in L$, aber $yw \notin L$. Also gilt $x \not R_L\, y$ und somit $[x]_{R_L} \neq [y]_{R_L}$. □

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Welche der folgenden Relationen $\sim$ sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$ und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $x \sim y \iff \exists m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\colon x^m = y^n$
2. $x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z}\colon y^2 = kx$

Lösung

1. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Beweis:

   $\sim$ ist reflexiv

   Sei $x \in \mathbb{Z}$ beliebig. Wähle $m = n = 1$. Dann sind $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und es gilt: $x^m = x = x^n$. Somit ist $x \sim x$.

   $\sim$ ist symmetrisch

   Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ beliebig mit $x \sim y$. Dann existieren $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $x^m = y^n$. Wähle $m' = n$ und $n' = m$. Dann sind $m', n' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und es gilt: $y^{m'} = y^n = x^m = x^{n'}$. Somit ist $y \sim x$.

   $\sim$ ist transitiv

   Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ beliebig mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann existieren Zahlen $m, m', n, n' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $x^m = y^n$ und $x^{m'} = y^{n'}$. Wähle $m'' = m \cdot m'$ und $n'' = n \cdot n'$. Dann sind $m'', n'' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und es gilt:

   $$x^{m''} = x^{m \cdot m'} = (x^m)^{m'} = (y^n)^{m'} = (y^{m'})^n = (z^{n'})^n = z^{n \cdot n'} = z^{n''}.$$

   Somit ist $x \sim z$.

2. $\sim$ ist zwar reflexiv (man wählt $k = x$), aber weder symmetrisch (da z. B. $4 \sim 6$ und $6 \not\sim 4$) noch transitiv (da z. B. $8 \sim 4$, $4 \sim 2$ und $8 \not\sim 2$) und somit keine Äquivalenzrelation.

Zusatzaufgabe 2

Bestimmen Sie Quotientenmenge und Index der Relation R_L für die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 1 \mod 3\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Lösung

$\Sigma^*/R_L = \{[\varepsilon]_{R_L}, [a]_{R_L}, [aa]_{R_L}\}$ mit

- $[\varepsilon]_{R_L} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 0 \mod 3\}$,
- $[a]_{R_L} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 1 \mod 3\}$ und
- $[aa]_{R_L} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 2 \mod 3\}$,

d. h. $\text{Index}(R_L) = |\Sigma^*/R_L| = 3$.

Zusatzaufgabe 3

Zeigen Sie erneut, dass die Sprachen aus Präsenzaufgabe 1 nicht regulär sind. Verwenden Sie diesmal den Satz von Myhill-Nerode.

Lösung

Wir gehen analog zum Beweis in Präsenzaufgabe 3 vor.

1. Sei $M = \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt $M \subseteq \Sigma^*$ und $|M| = \infty$. Seien nun $x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \neq y$. Dann existieren $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, $x = a^i$ und $y = a^j$. Für $w = ba^ib$ ist $xw \in L$, aber $yw \notin L$. Also gilt $x \not R_L\, y$ und somit $[x]_{R_L} \neq [y]_{R_L}$. □

2. Sei $M = \left\{a^{3^k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}$. Dann gilt $M \subseteq \Sigma^*$ und $|M| = \infty$. Seien nun $x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \neq y$. Dann existieren $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, $x = a^{3^i}$ und $y = a^{3^j}$. O. B. d. A. sei $i < j$. Für $w = a^{2\cdot 3^i}$ ist $xw = a^{3^i + 2\cdot 3^i} = a^{3\cdot 3^i} = a^{3^{i+1}} \in L$, aber $yw = a^{3^j+2\cdot 3^i} = a^{3^i(3^{j-i}+2)} \notin L$, da $3^{j-i}+2$ nicht durch 3 teilbar und somit $3^i(3^{j-i}+2)$ keine Dreierpotenz ist. Also gilt $x \not R_L\, y$ und somit $[x]_{R_L} \neq [y]_{R_L}$. □

3. Sei $M = \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt $M \subseteq \Sigma^*$ und $|M| = \infty$. Seien nun $x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \neq y$. Dann existieren $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, $x = a^i$ und $y = a^j$. O. B. d. A. sei $i < j$. Für $w = b^{i+1}$ ist $xw = a^ib^{i+1} \in L$, aber $yw = a^jb^{i+1} \notin L$, da $j \geq i + 1$. Also gilt $x \not R_L\, y$ und somit $[x]_{R_L} \neq [y]_{R_L}$. □

4. Sei $M = \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt $M \subseteq \Sigma^*$ und $|M| = \infty$. Seien nun $x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \neq y$. Dann existieren $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, $x = a^i$ und $y = a^j$. Für $w = c^i$ ist $xw = a^ic^i \in L$, aber $yw = a^jc^i \notin L$. Also gilt $x \not R_L\, y$ und somit $[x]_{R_L} \neq [y]_{R_L}$. □

Bemerkung: Wir konnten bei Teilaufgaben 2 und 3 o. B. d. A. (*ohne Beschränkung der Allgemeinheit*) $i < j$ annehmen, weil der Fall $i > j$ völlig analog funktioniert.

Zusatzaufgabe 4

Welche der folgenden Sprachen L über dem entsprechenden Alphabet Σ sind regulär und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $L = \left\{a^{126+257k+358l} \,\middle|\, k, l \in \mathbb{N}\right\}$ über $\Sigma = \{a\}$
2. $L = \left\{a^k b^l \,\middle|\, k > l\right\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$
3. $L = \left\{a^k b^l \,\middle|\, \mathrm{ggT}(k, l) = 1\right\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$

   Hinweis: $\mathrm{ggT}(k, l)$ ist der *größte gemeinsame Teiler* von k und l. $\mathrm{ggT}(k, l) = 1$ besagt also, dass k und l *teilerfremd* sind.

Lösung

1. Die Sprache ist regulär, da sie von dem regulären Ausdruck $\gamma = a^{126}(a^{257}|a^{358})^*$ beschrieben wird.

2. Wir zeigen mit dem Pumping-Lemma, dass L nicht regulär ist. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^{n+1}b^n$. Dann gilt $x \in L$ und $|x| = 2n+1 \geq n$. Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ beliebig mit (1) $x = uvw$, (2) $|uv| \leq n$ und (3) $|v| \geq 1$. Wähle nun $i = 0$. Aus (1) und (2) folgt $v = a^j$ für ein $j \in \mathbb{N}$ und somit $uv^iw = a^{n+1-j}b^n$ mit $j > 0$ nach (3). Wegen $n + 1 - j \leq n$ ist $uv^iw \notin L$.

   Bemerkung: Ein Beweis mit dem Satz von Myhill-Nerode ist auch möglich.

3. Wir zeigen mit dem Satz von Myhill-Nerode, dass L nicht regulär ist und verwenden dabei die Tatsache, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

   Sei $M = \left\{a^k \,\middle|\, k \text{ prim}\right\}$. Dann gilt $M \subseteq \Sigma^*$ und $|M| = \infty$. Seien nun $x, y \in \Sigma^*$ beliebig mit $x \neq y$. Dann existieren Primzahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p \neq q$, $x = a^p$ und $y = a^q$. Für $w = b^p$ ist $xw = a^p b^p \in L$, da $\mathrm{ggT}(p, p) = p > 1$, aber $yw = a^q b^p \notin L$, da $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$. Also gilt $x \not R_L\, y$ und somit $[x]_{R_L} \neq [y]_{R_L}$.

   Erinnerung: Eine Primzahl wird von <u>genau zwei</u> natürlichen Zahlen geteilt: von der 1 und von sich selbst. Insbesondere ist 2 die kleinste Primzahl.

Zusatzaufgabe 5

In Präsenzaufgabe 2 von Ergänzungsblatt 5 haben wir eine kontextfreie Grammatik für die Menge $\mathrm{RE}(\Sigma)$ aller regulären Ausdrücke über einem Alphabet Σ angegeben. Zeigen Sie, dass $\mathrm{RE}(\Sigma)$ für kein Alphabet Σ regulär ist.

Hinweise:

- Da Alphabete nichtleer sind, kann von der Existenz eines Buchstaben $a \in \Sigma$ ausgegangen werden.
- $\mathrm{RE}(\Sigma)$ ist eine Sprache über dem erweiterten Alphabet $\Gamma = \Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, |, {}^*, (,)\}$.

Lösung

Wir verwenden die Tatsache, dass in jedem regulären Ausdruck $\gamma \in \mathrm{RE}(\Sigma)$ die Anzahl der öffnenden und die der schließenden Klammern gleich sind, d. h. $|\gamma|_{(} = |\gamma|_{)}$. Um Verwechslungen zu vermeiden, verwenden wir runde Klammern für die Klammern, die in Γ als Buchstaben vorkommen, und eckige Klammern als Hilfssymbole. Beispielsweise ist mit $(^3a[)^*]^3$ das Wort $(((a)^*)^*)^*$ der Länge 10 gemeint.

Mit dem Pumping-Lemma

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = (^n a[)^*]^n$. Dann gilt $x \in L$ und $|x| = 3n + 1 \geq n$. Seien $u, v, w \in \Gamma^*$ beliebig mit (1) $x = uvw$, (2) $|uv| \leq n$ und (3) $|v| \geq 1$. Wähle nun $i = 0$. Aus (1) und (2) folgt $v = (^j$ für ein $j \in \mathbb{N}$ und aus (3) folgt $j > 0$. Somit gilt $uv^iw \notin L$, da $|uv^iw|_{(} < |uv^iw|_{)}$.

Mit dem Satz von Myhill-Nerode

Sei $M = \left\{ (^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$. Dann gilt $M \subseteq \Gamma^*$ und $|M| = \infty$. Seien nun $x, y \in \Gamma^*$ beliebig mit $x \neq y$. Dann existieren $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, $x = (^i$ und $y = (^j$. Für $w = a[)^*]^i$ ist $xw \in L$, aber $yw \notin L$. Also gilt $x \not R_L\, y$ und somit $[x]_{R_L} \neq [y]_{R_L}$.