Lösungen zum Ergänzungsblatt 5

Hinweise:

- Wir lassen bei regulären Ausdrücken Klammern weg, wenn keine Verwechlungsgefahr besteht. Dabei halten wir uns an die Konvention, dass der Stern stärker als die Konkatenation bindet und die Konkatenation stärker als die Alternative. Beispielsweise schreiben wir $\gamma = a|b|ba^*$ statt $\gamma = ((a|b)|b(a)^*)$.
- Zwei reguläre Ausdrücke α und β heißen *äquivalent* (in Zeichen $\alpha \equiv \beta$), wenn sie dieselbe Sprache beschreiben, d. h.:

$$\alpha \equiv \beta \iff L(\alpha) = L(\beta).$$

Beispielsweise gilt: $\alpha(\beta|\gamma) \equiv \alpha\beta|\alpha\gamma$ und $(\alpha|\beta)\gamma \equiv \alpha\gamma|\beta\gamma$.

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

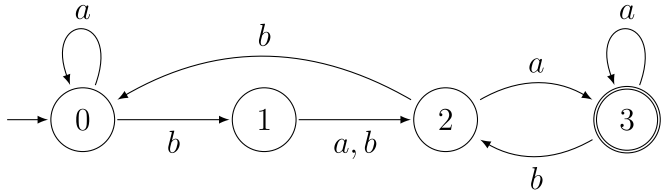
Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA. Eine Sequenz $r \in Q^+$ von Zuständen heißt *Lauf* (engl. *run*) von M auf $w \in \Sigma^{|r|-1}$, wenn für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i < |r|$ gilt:

$$\delta(r[i], w[i]) = r[i+1].$$

Wir sagen, dass r in $r[1]$ *beginnt* und in $r[|r|]$ *endet* und nennen $r[2], \ldots, r[|r|-1]$ die *Zwischenzustände* von r.

Hinweis: Mit $x[i]$ bezeichnen wir den Buchstaben an der i-ten Stelle (beginnend bei 1) eines Wortes x. Für das Wort $x = bab$ über dem Alphabet $\{a, b\}$ gilt beispielsweise $x[1] = x[3] = b$ und $x[2] = a$.

1. Beschreiben Sie intuitiv was ein Lauf von M auf w ist.
2. Für diese Teilaufgabe sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ der folgende DEA:



   (a) Geben Sie zu jedem der folgenden Paare $(w, q) \in \Sigma^* \times Q$ einen Lauf r von M auf w an, der in q beginnt. Wo endet r? Welche Zwischenzustände besitzt r?

i. $w = babb$, $q = 2$ ii. $w = bb$, $q = 3$ iii. $w = \varepsilon$, $q = 1$

(b) Geben Sie zu jedem der folgenden Paare $(w, q) \in \Sigma^* \times Q$ einen Lauf r von M auf w an, der in q endet. Wo beginnt r? Welche Zwischenzustände besitzt r?

i. $w = \varepsilon$, $q = 2$ ii. $w = abaa$, $q = 0$ iii. $w = bab$, $q = 1$

(c) Geben Sie zu jedem der folgenden Paare $(p, q) \in Q \times Q$ ein Wort $w \in \Sigma^*$ minimaler Länge an, für das ein Lauf von M auf w existiert, der in p beginnt und in q endet.

i. $p = 3$, $q = 1$ ii. $p = 2$, $q = 0$ iii. $p = 0$, $q = 0$

3. Welche der folgenden Aussagen gelten für jedes $w \in \Sigma^*$ und jedes $q \in Q$?
   (a) Es gibt mindestens einen Lauf von M auf w, der in q beginnt.
   (b) Es gibt höchstens einen Lauf von M auf w, der in q beginnt.
   (c) Es gibt mindestens einen Lauf von M auf w, der in q endet.
   (d) Es gibt höchstens einen Lauf von M auf w, der in q endet.

Lösung

1. Ein Lauf von M auf w ist die Sequenz von Zuständen, die M besucht, wenn er im ersten Zustand des Laufes beginnt, und w liest.
2. (a) i. $r = 20012$, Ende: 2, Zwischenzustände: 0 und 1.
   ii. $r = 320$, Ende: 0, Zwischenzustände: 2.
   iii. $r = 1$, Ende: 1, Zwischenzustände: keine.

   (b) i. $r = 2$, Beginn: 2, Zwischenzustände: keine.
   ii. $r = 12000$, Beginn: 1, Zwischenzustände: 0 und 2.
   iii. $r = 2001$, Beginn: 2, Zwischenzustände: 0.

   (c) i. $w = bbb$ ii. $w = b$ iii. $w = \varepsilon$
3. Aussagen (a) und (b) sind richtig, (c) und (d) falsch.

Vorbereitungsaufgabe 2

Gegeben seien reguläre Ausdrücke γ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Welche der Wörter ε, a, bb, bab, $abab$ und $bbaa$ sind in $L(\gamma)$ enthalten und welche nicht?

1. $\gamma = (ab)^*$
2. $\gamma = (aa|bb)^*$
3. $\gamma = (a|b)^*a(a|b)^*$
4. $\gamma = a^*b^*$
5. $\gamma = (a^*b^*)^*$
6. $\gamma = b^*(\varepsilon|a|aa)b^*$

Lösung

1. $\varepsilon, abab \in L(\gamma)$ und $a, bb, bab, bbaa \notin L(\gamma)$
2. $\varepsilon, bb, bbaa \in L(\gamma)$ und $a, bab, abab \notin L(\gamma)$
3. $a, bab, abab, bbaa \in L(\gamma)$ und $\varepsilon, bb \notin L(\gamma)$
4. $\varepsilon, a, bb \in L(\gamma)$ und $bab, abab, bbaa \notin L(\gamma)$
5. $\varepsilon, a, bb, bab, abab, bbaa \in L(\gamma)$
6. $\varepsilon, a, bb, bab, bbaa \in L(\gamma)$ und $abab \notin L(\gamma)$

Vorbereitungsaufgabe 3

In dieser Aufgabe soll der Beweis vom Satz von Kleene wiederholt weden.

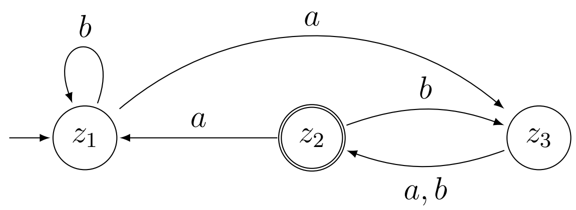
1. Gegeben seien zwei reguläre Grammatiken $G_1 = (\{S_1, T\}, \{a, b\}, P_1, S_1)$ und $G_2 = (\{S_2, U\}, \{a, b\}, P_2, S_2)$ mit Produktionen

$$P_1\colon \quad S_1 \to aT \mid b \qquad\qquad P_2\colon \quad S_2 \to bU \mid \varepsilon$$
$$T \to aS_1 \mid bT \qquad\qquad U \to aU \mid b$$

   Seien α und β reguläre Ausdrücke mit $L(G_1) = L(\alpha)$ und $L(G_2) = L(\beta)$. Geben Sie eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ für folgende Fälle an.

   (a) $L(G) = L(\alpha\beta)$ (b) $L(G) = L((\alpha|\beta))$ (c) $L(G) = L((\alpha)^*)$

2. Verallgemeinern Sie Ihre Konstruktion aus Teil 1 (c) für eine beliebige Grammatik $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$.
3. Geben Sie eine Mengendarstellung von $R^k_{i,j}$ an. Verwenden Sie die in Vorbereitungsaufgabe 1 eingeführten Begriffe.
4. Sei M der folgende DEA:



   Bestimmen Sie $\alpha^1_{2,1}$, $\alpha^1_{1,3}$ und $\alpha^1_{3,2}$. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie diese durch kürzere, äquivalente Ausdrücke ersetzen.

Lösung

1. (a) $G = (\{S_1, S_2, T, U\}, \{a, b\}, P, S_1)$ mit Produktionen

$$S_1 \to aT \mid bS_2 \mid b \qquad S_2 \to bU$$
$$T \to aS_1 \mid bT \qquad U \to aU \mid b$$

   (b) $G = (\{S, S_1, S_2, T, U\}, \{a, b\}, P, S)$ mit Produktionen

$$S \to aT \mid b \mid bU \mid \varepsilon \qquad S_1 \to aT \mid b \qquad S_2 \to bU$$
$$T \to aS_1 \mid bT \qquad U \to aU \mid b$$

   (c) $G = (\{S, S_1, S_2, T, U\}, \{a, b\}, P, S)$ mit Produktionen

$$S \to aT \mid bS_1 \mid \varepsilon$$
$$S_1 \to aT \mid bS_1$$
$$T \to aS_1 \mid bT$$

2. Wähle S beliebig mit $S \notin V_1$, $V = V_1 \cup \{S\}$ und

$$P = (\{(S, v) \mid (S_1, v) \in P_1 \vee v = \varepsilon\} \cup \{(u, vS_1) \mid (u, v) \in P_1 \wedge v \in \Sigma\}) \setminus \{(S_1, \varepsilon)\}.$$

3. $R^k_{i,j} = \{w \in \Sigma^* \mid$ es gibt einen Lauf von M auf w, der in z_i beginnt, in z_j endet und nur Zwischenzustände z_m mit $m \leq k$ besitzt$\}$

4. $\alpha^1_{2,1} = (\alpha^0_{2,1} | \alpha^0_{2,1}(\alpha^0_{1,1})^* \alpha^0_{1,1}) = (a|a(\varepsilon|b)^*(\varepsilon|b)) \equiv ab^*$
   $\alpha^1_{1,3} = (\alpha^0_{1,3} | \alpha^0_{1,1}(\alpha^0_{1,1})^* \alpha^0_{1,3}) = a|(\varepsilon|b)(\varepsilon|b)^*a) \equiv b^*a$
   $\alpha^1_{3,2} = (\alpha^0_{3,2} | \alpha^0_{3,1}(\alpha^0_{1,1})^* \alpha^0_{1,2}) = ((a|b)|\emptyset(\varepsilon|b)^*\emptyset) \equiv a|b$

Vorbereitungsaufgabe 4

Seien $\varphi\colon \{a, b, c\}^* \to \{a, b\}^*$ ein Homomorphismus, der durch $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = ab$ und $\varphi(c) = \varepsilon$ definiert ist, und $\psi\colon \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ eine Funktion mit $\psi(w) = a^{|w|_a} b^{|w|_b}$.

1. Bestimmen Sie:
   (a) $\varphi(abcca)$
   (b) $\psi(abbbabaa)$
   (c) $\varphi(a^{100}b^{100}c^{100})$
   (d) $\psi(a^{15}b^{20}a^{25}b^{30})$
   (e) $\varphi(\varepsilon)$
   (f) $\psi(\varepsilon)$
2. Geben Sie $\varphi(L)$ für $L = \left\{a^k b^l c^m \,\middle|\, k, l, m \in \mathbb{N}\right\}$ an.
3. Sei $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$.
   (a) Geben Sie $\psi(L)$ an.
   (b) Gilt $\varphi(L) = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 2|w|_b\}$?
4. Ist ψ ein Homomorphismus?

Hinweise:

- Für die Definition von Homomorphismen siehe Übungsblatt 4, Aufgabe 3.
- Ein Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ wird durch die Bilder der Werte aus Σ eindeutig bestimmt. Dann gilt für alle $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$:

  $$\varphi(a_1 \ldots a_n) = \varphi(a_1) \ldots \varphi(a_n).$$

  Aus diesem Grund konnte in dieser Aufgabe φ durch Angabe der Werte $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ und $\varphi(c)$ eindeutig definiert werden.

Lösung

1. (a) $aaba$ (c) $a^{100}(ab)^{100}$ (e) ε

   (b) $aaaabbbb$ (d) $a^{40}b^{50}$ (f) ε

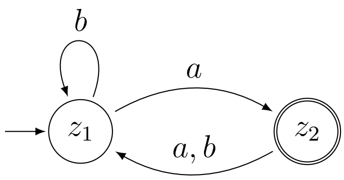
2. $\varphi(L) = \left\{a^k(ab)^l \,\middle|\, k, l \in \mathbb{N}\right\}$
3. (a) $\psi(L) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

   (b) Nein. Beispielsweise gilt: $baa \notin \varphi(L)$.
4. Nein. Für $u = v = ba$ gilt: $\psi(uv) = aabb \neq abab = \psi(u)\psi(v)$.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Sei M der folgende DEA:



Bestimmen Sie mithilfe des Beweises vom Satz von Kleene einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = T(M)$.

Sie dürfen in dieser Aufgabe die berechneten Ausdrücke $\alpha_{i,j}^k$ vereinfachen, d. h. durch kürzere, äquivalente Ausdrücke ersetzen, und mit diesen weiterrechnen.

Lösung

- $\alpha^0_{1,1} = \varepsilon|b$
- $\alpha^0_{1,2} = a$
- $\alpha^0_{2,1} = a|b$
- $\alpha^0_{2,2} = \varepsilon$
- $\alpha^1_{1,1} = (b|\varepsilon)|(b|\varepsilon)(b|\varepsilon)^*(b|\varepsilon) \equiv b^*$
- $\alpha^1_{1,2} = a|(b|\varepsilon)(b|\varepsilon)^*a \equiv a|b^*a \equiv b^*a$
- $\alpha^1_{2,1} = (a|b)|(a|b)(b|\varepsilon)^*(b|\varepsilon) \equiv (a|b)|(a|b)b^* \equiv (a|b)b^*$
- $\alpha^1_{2,2} = \varepsilon|(a|b)(b|\varepsilon)^*a \equiv \varepsilon|(a|b)b^*a$

Da z_2 der einzige Endzustand ist, erhalten wir:

$$\gamma = \alpha^2_{1,2} = b^*a|b^*a(\varepsilon|(a|b)b^*a)^*(\varepsilon|(a|b)b^*a) \equiv b^*a|b^*a((a|b)b^*a)^* \equiv b^*a((a|b)b^*a)^*.$$

Präsenzaufgabe 2

Seien Σ ein Alphabet mit $\varepsilon, \emptyset, |, ^*, (,) \notin \Sigma$ und $\mathrm{RE}(\Sigma)$ die Menge aller regulären Ausdrücke (engl. *regular expressions*) über Σ.

1. Geben Sie eine Grammatik G mit $L(G) = \mathrm{RE}(\Sigma)$ an.
2. Da reguläre Ausdrücke induktiv definiert sind, gilt für sie das Prinzip der *strukturellen Induktion*: Jedes $\gamma \in \mathrm{RE}(\Sigma)$ besitzt genau dann eine Eigenschaft $P(\gamma)$, wenn folgende Aussagen gelten:

(1) $P(\emptyset)$	(4) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{RE}(\Sigma)\colon ((P(\alpha) \wedge P(\beta)) \implies P(\alpha\beta))$
(2) $P(\varepsilon)$	(5) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{RE}(\Sigma)\colon ((P(\alpha) \wedge P(\beta)) \implies P((\alpha|\beta)))$
(3) $\forall a \in \Sigma\colon P(a)$	(6) $\forall \alpha \in \mathrm{RE}(\Sigma)\colon (P(\alpha) \implies P((\alpha)^*))$

   (a) Welche Richtung der Äquivalenz ist trivial?

   (b) Zeigen Sie die nichttriviale Richtung der Äquivalenz.

Lösung

1. $G = (\{S\}, \Gamma, P, S)$ mit $\Gamma = \Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, |, ^*, (,)\}$ und

$$P = \{(S, \emptyset), (S, \varepsilon), (S, SS), (S, (S|S)), (S, (S)^*)\} \cup \{(S, a) \mid a \in \Sigma\}\,.$$

2. (a) Die Implikation von links nach rechts ist trivial.

   (b) Zu zeigen: Wenn Aussagen (1) bis (6) gelten, dann gilt $P(\gamma)$ für jeden regulären Ausdruck γ.

   Beweis durch Widerspruch

Angenommen, es gibt reguläre Ausdrücke, die die Eigenschaft P nicht haben. Sei γ ein regulärer Ausdruck minimaler Länge, für den $P(\gamma)$ falsch ist. Wegen (1), (2) und (3) ist $\gamma \notin \{\emptyset, \varepsilon\} \cup \Sigma$. Dann kann γ nur von der Form (i) $\gamma = \alpha\beta$, (ii) $\gamma = (\alpha|\beta)$ oder (iii) $\gamma = (\alpha)^*$ sein.

Im Fall (i) sind α und β reguläre Ausdrücke, die kürzer sind als γ. Da γ mit minimaler Länge gewählt wurde, gilt $P(\alpha)$ und $P(\beta)$ und nach (4) auch $P(\gamma)$. Widerspruch!

Die Fälle (ii) und (iii) funktionieren analog und verwenden entsprechend die Aussagen (5) und (6). $\square$

Präsenzaufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ definieren wir das gespiegelte (engl. *reversed*) Wort w^R rekursiv wie folgt:

$$w^R = \begin{cases} \varepsilon & \text{für } w = \varepsilon \\ au^R & \text{für } u \in \Sigma^* \text{ und } a \in \Sigma \text{ mit } w = ua. \end{cases}$$

1. Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Bestimmen Sie $(bac)^R$ durch wiederholtes Anwenden der Definition.
2. Zeigen Sie für alle $u, v \in \Sigma^*$: $(uv)^R = v^R u^R$.

Lösung

1. $(bac)^R = c(ba)^R = cab^R = cab\varepsilon^R = cab$.
2. Sei $u \in \Sigma^*$ beliebig. Wir zeigen die Aussage

$$\forall v \in \Sigma^* \colon (uv)^R = v^R u^R$$

mit Induktion nach der Wortlänge $|v|$ von v, d. h. wir zeigen die äquivalente Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N}, v \in \Sigma^n \colon (uv)^R = v^R u^R$$

mit Induktion nach n.

Induktionsanfang

Für $n = 0$ gilt $v = \varepsilon$ und somit $(uv)^R = u^R = v^R u^R$.

Induktionsschritt

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Angenommen, alle $v \in \Sigma^n$ erfüllen die Gleichung $(uv)^R = v^R u^R$ (IV). Sei $v' \in \Sigma^{n+1}$ beliebig. Dann existieren ein $v \in \Sigma^n$ und ein $a \in \Sigma$ mit $v' = va$. Daraus folgt

$$(uv')^R = (uva)^R = a(uv)^R \stackrel{\text{IV}}{=} av^R u^R = (va)^R u^R = v'^R u^R,$$

was zu zeigen war. $\square$

Präsenzaufgabe 4

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ einen möglichst einfachen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = L$ an.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aabb \text{ ist Präfix von } w\}$
2. $L = \{a^m b^n \mid m \text{ ist gerade und } n \text{ ungerade}\}$
3. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \geq 1 \wedge |w|_b \geq 1\}$
4. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aba \text{ ist Präfix und Suffix von } w\}$
5. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aab \text{ ist kein Infix von } w\}$
6. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ und } |w|_b \text{ sind beide gerade}\}$

Lösung

Zu einigen Teilaufgaben geben wir mehrere äquivalente Lösungen an. Elegantere Lösungsvorschläge sind immer herzlich willkommen!

1. $\gamma = aabb(a|b)^*$
2. $\gamma = (aa)^*b(bb)^* \equiv (aa)^*(bb)^*b$
3. $\gamma = (a|b)^*(ab|ba)(a|b)^*$
4. $\gamma = aba|ababa|aba(a|b)^*aba \equiv aba(\varepsilon|ba|(a|b)^*aba) \equiv (\varepsilon|ab|aba(a|b)^*)aba$
5. $\gamma = (b|ab)^*a^*$
6. $\gamma = (aa|bb|(ab|ba)(aa|bb)^*(ab|ba))^*$

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ einen möglichst einfachen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = L$ an.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid aabb \text{ ist Suffix von } w\}$
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid abba \text{ ein Infix von } w\}$
3. $L = \{w \in \Sigma^* \mid ab \text{ ist kein Infix von } w\}$
4. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{der dritte Buchstabe in } w \text{ ist ein } a\}$
5. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{der drittletzte Buchstabe in } w \text{ ist ein } a\}$
6. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 3\}$
7. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \geq 2 \vee |w|_b \geq 2\}$
8. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ oder } |w|_b \text{ ist gerade}\}$

9. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 1 \bmod 3\}$
10. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 0 \mod 3 \vee |w|_b \equiv 1 \mod 2\}$

Lösung

Zu einigen Teilaufgaben geben wir mehrere äquivalente Lösungen an. Elegantere Lösungsvorschläge sind immer herzlich willkommen!

1. $\gamma = (a|b)^*aabb$
2. $\gamma = (a|b)^*abba(a|b)^*$
3. $\gamma = b^*a^*$
4. $\gamma = (a|b)(a|b)a(a|b)^*$
5. $\gamma = (a|b)^*a(a|b)(a|b)$
6. $\gamma = b^*ab^*ab^*ab^*$
7. $\gamma = (a|b)^*a(a|b)^*a(a|b)^*|(a|b)^*b(a|b)^*b(a|b)^* \equiv (a|b)^*(a(a|b)^*a|b(a|b)^*b)(a|b)^*$
8. $\gamma = b^*(ab^*ab^*)^*|a^*(ba^*ba^*)^* \equiv (b^*ab^*a)^*b^*|(a^*ba^*b)^*a^*$
9. $\gamma = (a|b)((a|b)(a|b)(a|b))^*$
10. $\gamma = b^*(ab^*ab^*ab^*)^*|a^*ba^*(ba^*ba^*)^*$

Zusatzaufgabe 2

Sei Σ ein Alphabet. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ sei w^R definiert wie in Präsenzaufgabe 3.

1. Zeigen Sie für beliebige Sprachen A und B über Σ:
   (a) $(AB)^R = B^R A^R$
   (b) $(A \cup B)^R = A^R \cup B^R$
   (c) $(A^*)^R = (A^R)^*$
2. Zeigen Sie: Für eine reguläre Sprache L ist auch $L^R = \left\{w^R \,\middle|\, w \in L\right\}$ regulär.

Hinweise: Verwenden Sie das Ergebnis aus Präsenzaufgabe 3, Teil 2, den Satz von Kleene und das Prinzip der strukturellen Induktion.

Lösung

1. (a) Sei $w \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z \in (AB)^R &\iff \exists w \in AB\colon z = w^R \\ &\iff \exists u \in A, v \in B\colon z = (uv)^R = v^R u^R \\ &\iff \exists x \in A^R, y \in B^R\colon z = yx \\ &\iff z \in B^R A^R. \end{aligned}$$

(b) Sei $w \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z \in (A \cup B)^R &\iff \exists w \in A \cup B \colon z = w^R \\ &\iff \exists w \in A \colon z = w^R \vee \exists w \in B \colon z = w^R \\ &\iff z \in A^R \vee z \in B^R \\ &\iff z \in A^R \cup B^R. \end{aligned}$$

(c) Zuerst zeigen wir per Induktion: $\forall n \in \mathbb{N} \colon (A^R)^n = (A^n)^R$.

<u>Induktionsanfang</u>

$(A^R)^0 = \{\varepsilon\} = \{\varepsilon^R\} = \{\varepsilon\}^R = (A^0)^R$.

<u>Induktionsschritt</u>

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Angenommen, es gilt $(A^R)^n = (A^n)^R$ (IV). Dann folgt:

$$(A^R)^{n+1} = (A^R)^n A^R \overset{\text{IV}}{=} (A^n)^R A^R \overset{\text{(a)}}{=} (AA^n)^R = (A^{n+1})^R,$$

was zu zeigen war.

Als nächstes zeigen wir die eigentliche Aussage. Sei hierfür $w \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z \in (A^*)^R &\iff \exists w \in A^* \colon z = w^R \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}, w \in A^n \colon z = w^R \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N} \colon z \in (A^n)^R = (A^R)^n \\ &\iff z \in (A^R)^*. \end{aligned}$$

2. Zuerst zeigen wir, dass für jeden regulären Ausdruck γ ein regulärer Ausdruck γ' existiert mit $L(\gamma') = L(\gamma)^R$. Hierfür verwenden wir das Prinzip der strukturellen Induktion mit

$$P(\gamma) \iff \exists \gamma' \in \mathrm{RE}(\Sigma) \colon L(\gamma') = L(\gamma)^R.$$

(1) <u>Zu zeigen:</u> $P(\emptyset)$.

Für $\gamma' = \emptyset$ gilt: $L(\gamma') = \emptyset = \emptyset^R = L(\emptyset)^R$.

(2) <u>Zu zeigen:</u> $P(\varepsilon)$.

Für $\gamma' = \varepsilon$ gilt: $L(\gamma') = \{\varepsilon\} = \{\varepsilon^R\} = \{\varepsilon\}^R = L(\varepsilon)^R$.

(3) <u>Zu zeigen:</u> $\forall a \in \Sigma \colon P(a)$.

Sei $a \in \Sigma$ beliebig. Für $\gamma' = a$ gilt: $L(\gamma') = \{a\} = \{a^R\} = \{a\}^R = L(a)^R$.

(4) <u>Zu zeigen:</u> $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{RE}(\Sigma) \colon ((P(\alpha) \wedge P(\beta)) \implies P(\alpha\beta))$.

Seien α und β zwei beliebige reguläre Ausdrücke, sodass reguläre Ausdrücke α' und β' existieren mit $L(\alpha') = L(\alpha)^R$ und $L(\beta') = L(\beta)^R$. Für $\gamma' = \beta'\alpha'$ gilt:

$$\begin{aligned} L(\gamma') &= L(\beta'\alpha') = L(\beta')L(\alpha') \\ &= L(\beta)^R L(\alpha)^R = (L(\alpha)L(\beta))^R = (L(\alpha\beta))^R. \end{aligned}$$

(5) <u>Zu zeigen:</u> $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{RE}(\Sigma) \colon ((P(\alpha) \land P(\beta)) \implies P((\alpha|\beta)))$.

Seien α und β zwei beliebige reguläre Ausdrücke, sodass reguläre Ausdrücke α' und β' existieren mit $L(\alpha') = L(\alpha)^R$ und $L(\beta') = L(\beta)^R$. Für $\gamma' = (\alpha'|\beta')$ gilt:

$$\begin{aligned} L(\gamma') &= L(\alpha'|\beta') = L(\alpha') \cup L(\beta') \\ &= L(\alpha)^R \cup L(\beta)^R = (L(\alpha) \cup L(\beta))^R = L((\beta|\alpha))^R. \end{aligned}$$

(6) <u>Zu zeigen:</u> $\forall \alpha \in \mathrm{RE}(\Sigma) \colon (P(\alpha) \implies P((\alpha)^*))$.

Sei α ein beliebiger reguläre Ausdruck, sodass ein regulärer Ausdruck α' existiert mit $L(\alpha') = L(\alpha)^R$. Wähle $((\alpha)^*)' = (\alpha')^*$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} L(((\alpha)^*)') &= L((\alpha')^*) = L(\alpha')^* \\ &= (L(\alpha)^R)^* = (L(\alpha)^*)^R = L((\alpha)^*)^R. \end{aligned}$$

Der eigentlich Beweis folgt direkt daraus:

Sei nun L regulär. Dann gibt es nach dem Satz von Kleene einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = L$. Nach obiger Aussage existiert ein regulärer Ausdruck γ' mit $L(\gamma') = L(\gamma)^R$. Also ist L^R (wieder nach dem Satz von Kleene) regulär. □

Zusatzaufgabe 3

Zeigen Sie, ohne das Pumping-Lemma zu verwenden, dass die Sprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass ein DEA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ für L existiert und betrachten Sie den Lauf von M auf das Wort $w = a^{|Q|} b^{|Q|}$. Welches Wort $w' \notin L$ wird auch von M akzeptiert?

Lösung

Wir zeigen dies durch Widerspruch.

Angenommen, L wäre regulär. Dann gibt es einen DEA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit $T(M) = L$. Seien $w = a^{|Q|} b^{|Q|}$ ein Wort und r der (eindeutige) Lauf von M auf w, der in s beginnt. Wegen $w \in L$ endet r in einem Endzustand und da M nur $|Q|$ Zustände besitzt, gibt es Zahlen $i, j \in \mathbb{N}$ mit $1 \le i < j \le |Q| + 1$ und $r[i] = r[j]$.

Betrachte nun $r' = r[1] \ldots r[i] r[j+1] \ldots r[|r|]$. Wegen

$$\delta(r[i], a[i]) = \delta(r[j], a[j]) = r[j+1]$$

ist r' ein Lauf von M auf $w' = a^{n-j+i} b^n$, der in s beginnt und in einem Endzustand endet. Somit würde M auch w' akzeptieren, obwohl w' nicht in L enthalten ist. Widerspruch!