Lösungen zum Ergänzungsblatt 4

Vorbereitungsaufgaben

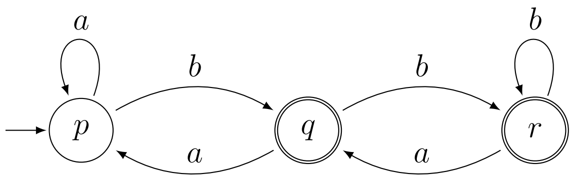
Vorbereitungsaufgabe 1

Sei $M = (\{p, q, r\}, \{a, b\}, \delta, p, \{q, r\})$ ein DEA mit folgender Überführungsfunktion δ:

x	$\delta(x, a)$	$\delta(x, b)$
p	p	q
q	p	r
r	q	r

1. Bestimmen Sie $\hat{\delta}(p, ba)$ durch wiederholtes Anwenden der Definition von $\hat{\delta}$ (siehe Vorlesungsfolie 8.3).
2. Geben Sie M grafisch an.
3. Verwenden Sie die auf Vorlesungsfolien 8.6 und 8.7 beschriebene Methode, um eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = T(M)$ zu konstruieren.

Lösung

1. $\hat{\delta}(p, ba) = \hat{\delta}(q, a) = \hat{\delta}(p, \varepsilon) = p$.
2. 

3. $G = (\{p, q, r\}, \{a, b\}, P, p)$ mit Produktionen

$$p \to ap \mid bq \mid b \qquad q \to ap \mid br \mid b \qquad r \to aq \mid br \mid a \mid b$$

Vorbereitungsaufgabe 2

Sei $G = (\{S, T, U\}, \{a, b\}, P, S)$ eine reguläre Grammatik mit Produktionen

$$S \to aT \mid b \qquad T \to bT \mid bU \qquad U \to bS \mid a \mid b.$$

Verwenden Sie die auf Vorlesungsfolien 11.5 und 11.6 beschriebene Methode, um einen NEA M mit $T(M) = L(G)$ zu konstruieren.

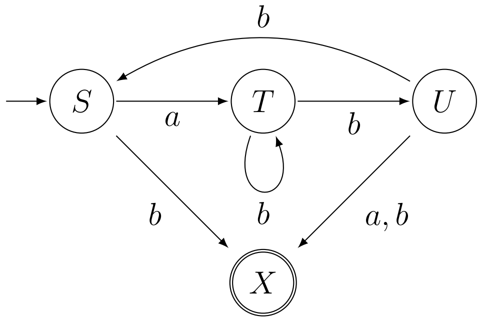
Geben Sie M sowohl als Tupel als auch grafisch an.

Lösung

$M = (\{S, T, U, X\}, \{a, b\}, \delta, S, \{X\})$ mit

x	$\delta(x, a)$	$\delta(x, b)$
S	$\{T\}$	$\{X\}$
T	$\emptyset$	$\{T, U\}$
U	$\{X\}$	$\{S, X\}$
X	$\emptyset$	$\emptyset$

Grafisch:



Vorbereitungsaufgabe 3

Sei $M = (\{p, q\}, \{a, b\}, \delta, \{p, q\}, \{q\})$ ein NEA mit folgender Überführungsfunktion δ:

x	$\delta(x, a)$	$\delta(x, b)$
p	$\{p, q\}$	$\{p\}$
q	$\{p\}$	$\emptyset$

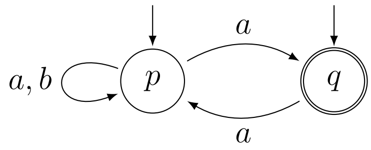
1. Bestimmen Sie $\hat{\delta}(\{p\}, ab)$ durch wiederholtes Anwenden der Definition von $\hat{\delta}$ (siehe Vorlesungsfolie 9.7).
2. Geben Sie M grafisch an.
3. Geben Sie folgende Potenzmengen explizit an:

   (a) $\mathcal{P}(\emptyset)$ (b) $\mathcal{P}(\{1\})$ (c) $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ (d) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$

   Erinnerung: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A, d. h.: $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. Für eine endliche Menge A besitzt $\mathcal{P}(A)$ genau $2^{|A|}$ Elemente.
4. Verwenden Sie die Potenzmengenkonstruktion aus Vorlesungsfolie 10.5, um einen DEA M' mit $T(M') = T(M)$ zu konstruieren.

   Geben Sie M' sowohl als Tupel als auch grafisch an. Beachten Sie, dass M' genau $2^2 = 4$ Zustände besitzen sollte.

Lösung

1. $\hat{\delta}(\{p\}, ab) = \hat{\delta}(\{p, q\}, b) = \hat{\delta}(\{p\}, \varepsilon) \cup \hat{\delta}(\emptyset, \varepsilon) = \{p\} \cup \emptyset = \{p\}$.
2. 

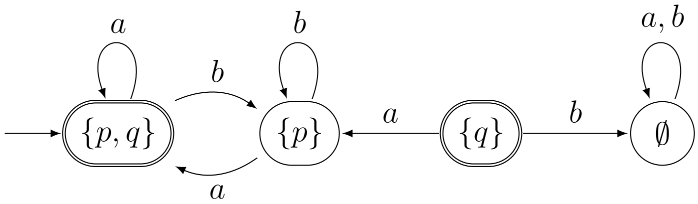
3. (a) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
   (b) $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$
   (c) $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
   (d) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
4. $M = (\{\mathcal{P}(\{p, q\}), \{a, b\}, \delta', \{p, q\}, \{\{q\}, \{p, q\}\})$ mit:

   - $\delta'(\emptyset, a) = \emptyset$
   - $\delta'(\emptyset, b) = \emptyset$
   - $\delta'(\{p\}, a) = \{p, q\}$
   - $\delta'(\{p\}, b) = \{p\}$
   - $\delta'(\{q\}, a) = \{q\}$
   - $\delta'(\{q\}, b) = \emptyset$
   - $\delta'(\{p, q\}, a) = \{p, q\} \cup \{q\} = \{p, q\}$
   - $\delta'(\{p, q\}, b) = \{p\} \cup \emptyset = \{p\}$

   Die Überführungsfunktion δ' als Tabelle:

x	$\delta'(x, a)$	$\delta'(x, b)$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$
$\{q\}$	$\{p\}$	$\emptyset$
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$

   Der DEA M' grafisch:

   Bemerkung: Man beachte, dass die Zustände $\emptyset$ und $\{q\}$ nicht vom Startzustand $\{p, q\}$ erreichbar sind. Somit könnten sie entfernt werden ohne die akzeptierte Sprache zu verändern. Dies ist bei der Potenzmengenkonstruktion öfters der Fall. Deshalb steht bei vielen Aufgaben der Hinweis, dass nicht erreichbare Zustände weggelassen werden dürfen.

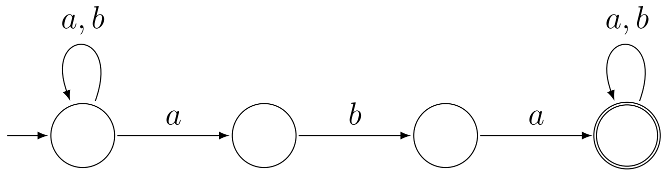
Vorbereitungsaufgabe 4

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L grafisch einen möglichst einfachen NEA an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

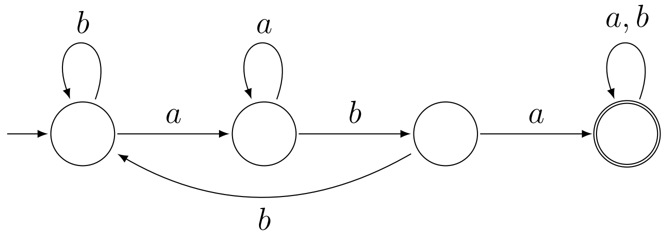
1. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid aba \text{ ist ein Infix von } w\}$
2. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid aba \text{ ist ein Suffix von } w\}$
3. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{das drittletzte Zeichen in } w \text{ ist ein } a\}$

Lösung

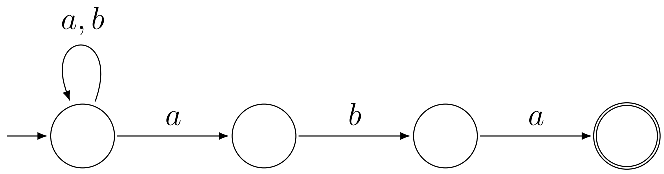
1. Ein einfacher NEA für L:



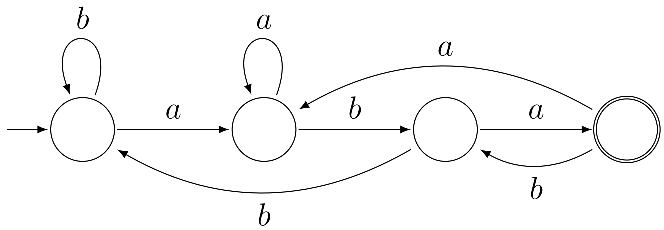
Der minimale DEA für L zum Vergleich:



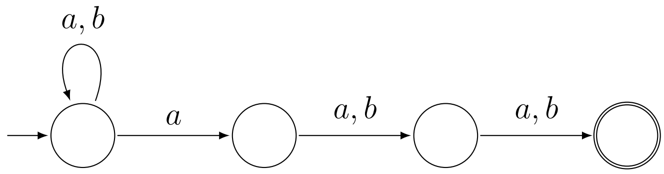
2. Ein einfacher NEA für L:



Der minimale DEA für L zum Vergleich:



3. Ein einfacher NEA für L:



Zum Vergleich: Nach Vorlesungsfolie 11.3 gibt es keinen DEA für L mit weniger als acht Zuständen.

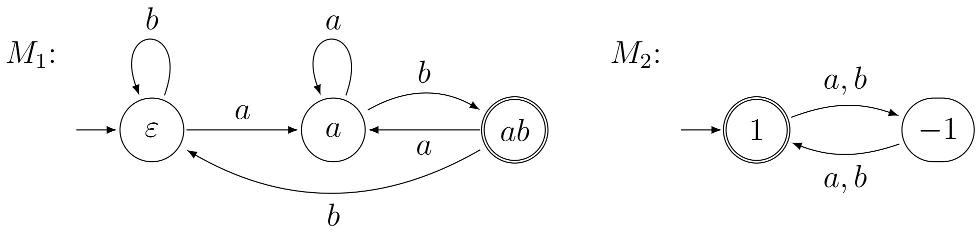
Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Geben Sie grafisch einen DEA M an, der die folgende Sprache akzeptiert:

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist gerade und } ab \text{ ist kein Suffix von } w\}\,.$$

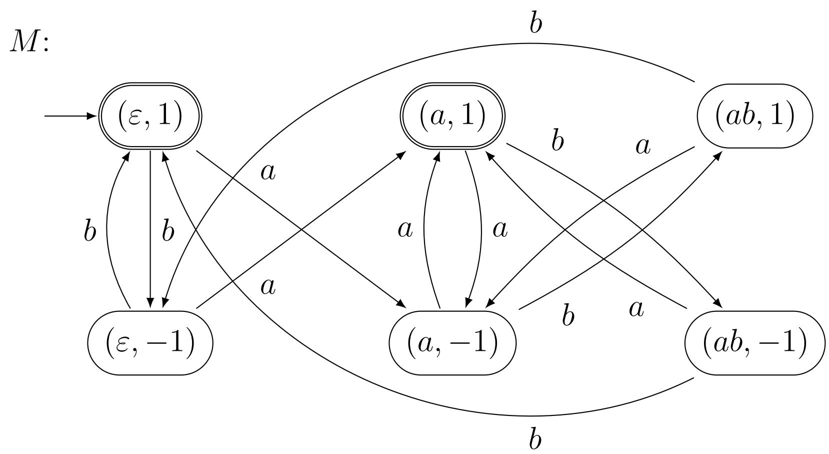
Hinweis: Betrachten Sie die DEAs



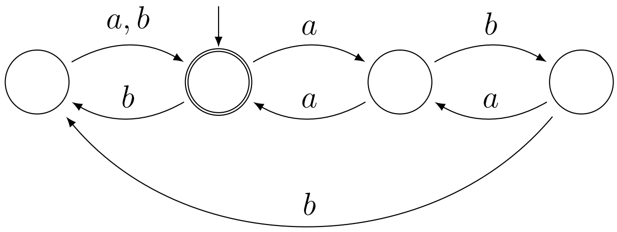
mit $T(M_1) = \{w \in \{a,b\}^* \mid ab \text{ ist Suffix von } w\}$ und $T(M_2) = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist gerade}\}$.

Lösung

Der folgende DEA M simuliert M_1 und M_2 synchron parallel und akzeptiert genau die Wörter, die von M_2, aber nicht von M_1 akzeptiert werden:



Bemerkung: Obwohl die Methode der parallelen Simulation sehr nützlich ist, hat sie (wie die Potenzmengenkonstruktion) den Nachteil, dass sie nicht immer einen DEA mit minimaler Anzahl an Zuständen liefert. In diesem Beispiel sind M_1 und M_2 minimal, aber M nicht. Ein minimaler DEA für L ist der folgende:



Präsenzaufgabe 2

Seien Σ ein Alphabet, L eine Sprache über Σ und $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ ihr Komplement.

Zeigen Sie:

1. Wenn L regulär ist, dann ist auch $\overline{L}$ regulär.
2. Wenn L regulär ist, dann ist auch $L' = \{w \in L \mid |w| \text{ ist gerade}\}$ regulär.

Lösung

1. Sei L regulär. Dann gibt es einen DEA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit $T(M) = L$. Wir zeigen die Regularität von $\overline{L}$, indem wir die Existenz eines DEA M' mit $T(M') = \overline{L}$ zeigen.

   Sei $M' = (Q, \Sigma, \delta, s, Q \setminus F)$. Dann ist M' ein DEA mit

   $$\begin{aligned} w \in T(M') &\iff \hat{\delta}(s, w) \in Q \setminus F \\ &\iff \hat{\delta}(s, w) \notin F \\ &\iff w \notin T(M) \\ &\iff w \in \overline{L} \end{aligned}$$

   für alle $w \in \Sigma^*$. □

2. Sei L regulär. Dann gibt es einen DEA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit $T(M) = L$. Wir zeigen die Regularität von L', indem wir einen DEA M' mit $T(M') = \overline{L'}$ angeben. Hierfür verwenden wir die Konstruktion aus Präsenzaufgabe 1, um M synchron parallel zu einem DEA, der alle Wörter über Σ mit gerader Länge akzeptiert, zu simulieren.

   Sei $M' = (Q \times \{-1, 1\}, \Sigma, \delta', (s, 1), F \times \{1\})$ ein DEA mit

   $$\delta'((p, q), a) = (\delta(p, a), -q).$$

   Wir zeigen $T(M') = L'$ in zwei Schritten.

   <u>Schritt 1</u>

   Für die erweiterte Überführungsfunktion $\hat{\delta}'$ zeigen wir zuerst

   $$\hat{\delta}'((p, q), w) = (\hat{\delta}(p, w), q \cdot (-1)^{|w|}) \tag{$*$}$$

   für alle $w \in \Sigma^*$, $p \in Q$ und $q \in \{-1, 1\}$. Den Beweis führen wir, analog zur Vorlesungsfolie 8.4, induktiv über die Länge von w. Wir zeigen also die äquivalente Aussage

   $$\forall n \in \mathbb{N}, w \in \Sigma^n, p \in Q, q \in \{-1, 1\} \colon \hat{\delta}'((p, q), w) = (\hat{\delta}(p, w), q \cdot (-1)^{|w|}).$$

Induktionsanfang

Für $n = 0$ gilt $w = \varepsilon$ und

$$\hat{\delta}'((p,q),\varepsilon) = (p,q) = (\hat{\delta}(p,\varepsilon), q \cdot (-1)^0)$$

für alle $p \in Q$ und alle $q \in \{-1, 1\}$.

Induktionsschritt

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Angenommen, die Gleichung $(*)$ gilt für dieses n (IV). Seien nun $w \in \Sigma^{n+1}$, $p \in Q$ und $q \in \{-1, 1\}$ beliebig. Dann hat w die Form $w = au$ für ein $u \in \Sigma^n$ und ein $a \in \Sigma$ und es folgt:

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}'((p,q),w) &= \hat{\delta}'((p,q),au) \\
&= \hat{\delta}'((\delta(p,a),-q),u) \\
&\overset{\text{IV}}{=} (\hat{\delta}'(\delta(p,a),u), -q \cdot (-1)^{|u|}) \\
&= (\hat{\delta}(p,au), q \cdot (-1)^{|u|+1}) \\
&= (\hat{\delta}(p,w), q \cdot (-1)^{|w|}).
\end{aligned}$$

Schritt 2

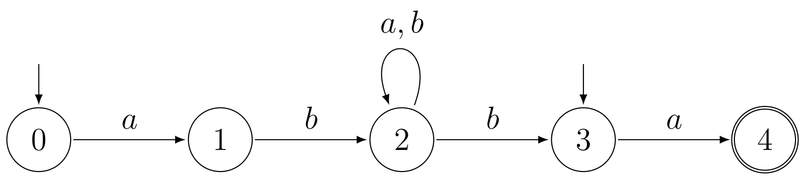
Wir zeigen nun die Mengengleichung $T(M') = L'$. Analog zu Teilaufgabe 1 gilt

$$\begin{aligned}
w \in T(M') &\iff \hat{\delta}'((s,1),w) \in F \times \{1\} \\
&\iff \hat{\delta}(s,w) \in F \wedge 1 \cdot (-1)^{|w|} \in \{1\} \\
&\iff w \in T(M) \wedge (-1)^{|w|} = 1 \\
&\iff w \in L \wedge |w| \text{ ist gerade}
\end{aligned}$$

für alle $w \in \Sigma^*$. □

Präsenzaufgabe 3

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ der folgende NEA mit Zustandsmenge $Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, Startzustandsmenge $S = \{0, 3\}$ und Endzustandsmenge $F = \{4\}$:



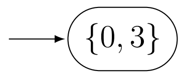
1. Geben Sie eine möglichst einfache Darstellung von $T(M)$ an.
2. Verwenden Sie die Potenzmengenkonstruktion, um einen DEA M' mit $T(M') = T(M)$ zu konstruieren. Geben Sie M' grafisch an. Nicht erreichbare Zustände müssen nicht gezeichnet werden.

Lösung

1. $T(M) = \{a\} \cup \{abwba \,|\, w \in \Sigma^*\}$
2. Wir wiederholen die Konstruktion aus Vorbereitungsaufgabe 3 mit dem Unterschied, dass wir mit dem Startknoten $S \in \mathcal{P}(Q)$ beginnen und solange erreichbare Zustände in den DEA hinzufügen, bis jeder Zustand genau eine ausgehende a-Kante und genau eine ausgehende b-Kante hat.

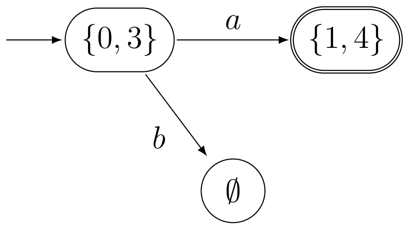
   <u>1. Schritt</u>

   Beginne die Zeichnung mit dem Startzustand $S = \{0, 3\}$.



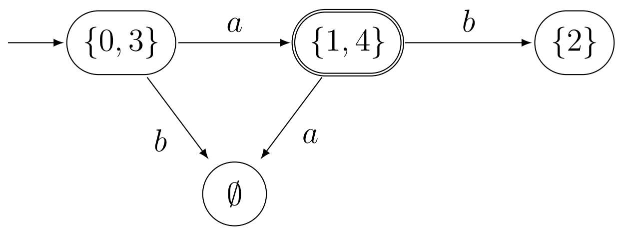
   <u>2. Schritt</u>

   Berechne $\delta'(\{0, 3\}, a) = \{1\} \cup \{4\} = \{1, 4\}$ und $\delta'(\{0, 3\}, b) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ und erweitere die Zeichnung um die neuen Zustände $\{1, 4\}$ und $\emptyset$ und die zwei vom Zustand $\{0, 3\}$ ausgehenden Kanten.



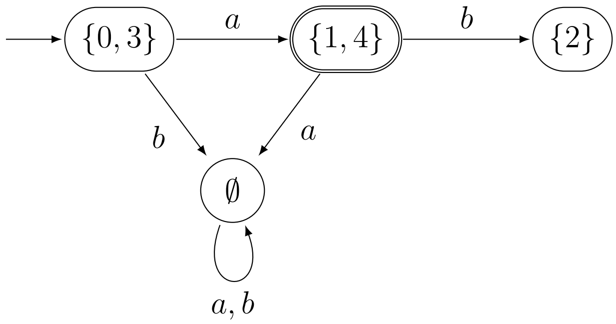
   <u>3. Schritt</u>

   Berechne $\delta'(\{1, 4\}, a) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ und $\delta'(\{1, 4\}, b) = \{2\} \cup \emptyset = \{2\}$ und erweitere die Zeichnung um den neuen Zustand $\{2\}$ und die zwei vom Zustand $\{1, 4\}$ ausgehenden Kanten.



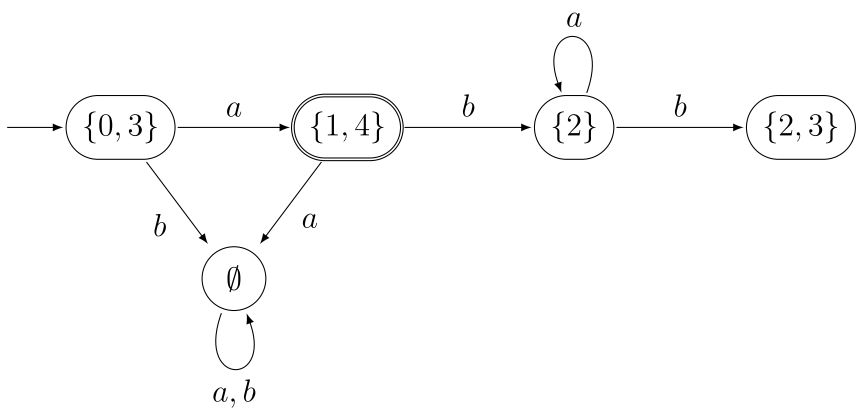
   <u>4. Schritt</u>

   Berechne $\delta'(\emptyset, a) = \emptyset$ und $\delta'(\emptyset, b) = \emptyset$ und erweitere die Zeichnung um die zwei vom Zustand $\emptyset$ ausgehenden Kanten.



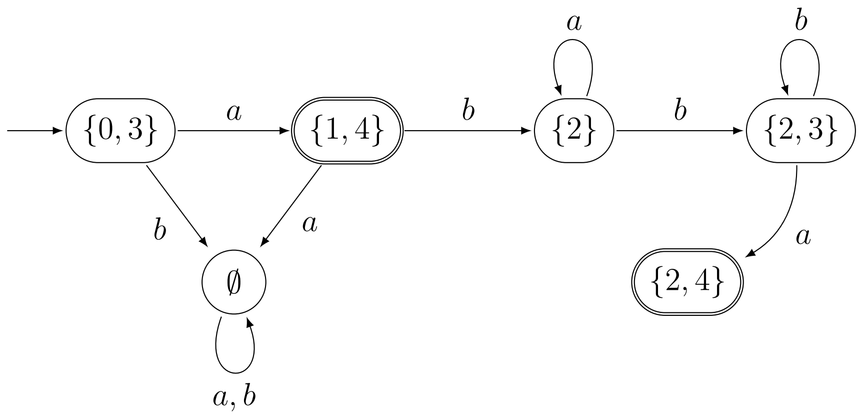
<u>5. Schritt</u>

Berechne $\delta'(\{2\}, a) = \{2\}$ und $\delta'(\{2\}, b) = \{2, 3\}$ und erweitere die Zeichnung um den neuen Zustand $\{2, 3\}$ und die zwei vom Zustand $\{2\}$ ausgehenden Kanten.



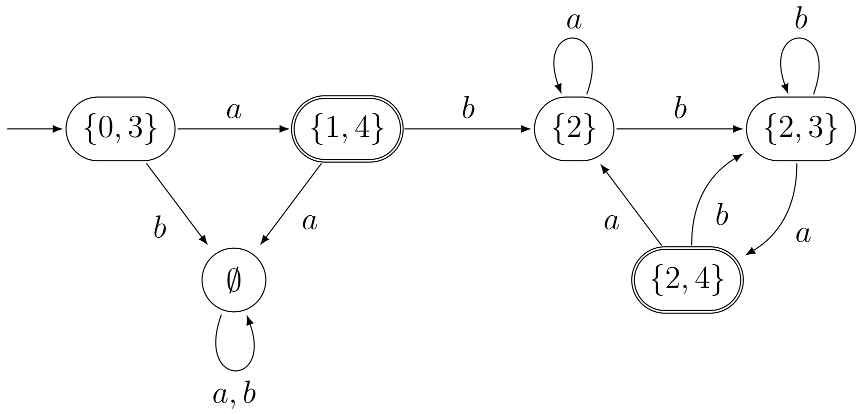
<u>6. Schritt</u>

Berechne $\delta'(\{2, 3\}, a) = \{2\} \cup \{4\} = \{2, 4\}$ und $\delta'(\{2, 3\}, b) = \{2, 3\} \cup \emptyset = \{2, 3\}$ und erweitere die Zeichnung um den neuen Zustand $\{2, 4\}$ und die zwei vom Zustand $\{2, 3\}$ ausgehenden Kanten.



<u>7. Schritt</u>

Berechne $\delta'(\{2, 4\}, a) = \{2\} \cup \emptyset = \{2\}$ und $\delta'(\{2, 4\}, b) = \{2, 3\} \cup \emptyset = \{2, 3\}$ und erweitere die Zeichnung um die zwei vom Zustand $\{2, 4\}$ ausgehenden Kanten.



Dies ist genau der DEA, der durch die Potenzmengenkonstruktion aus M entsteht, wenn man die nicht erreichbaren Zuständen weglässt.

Präsenzaufgabe 4

Betrachten Sie folgendes Kartenspiel:

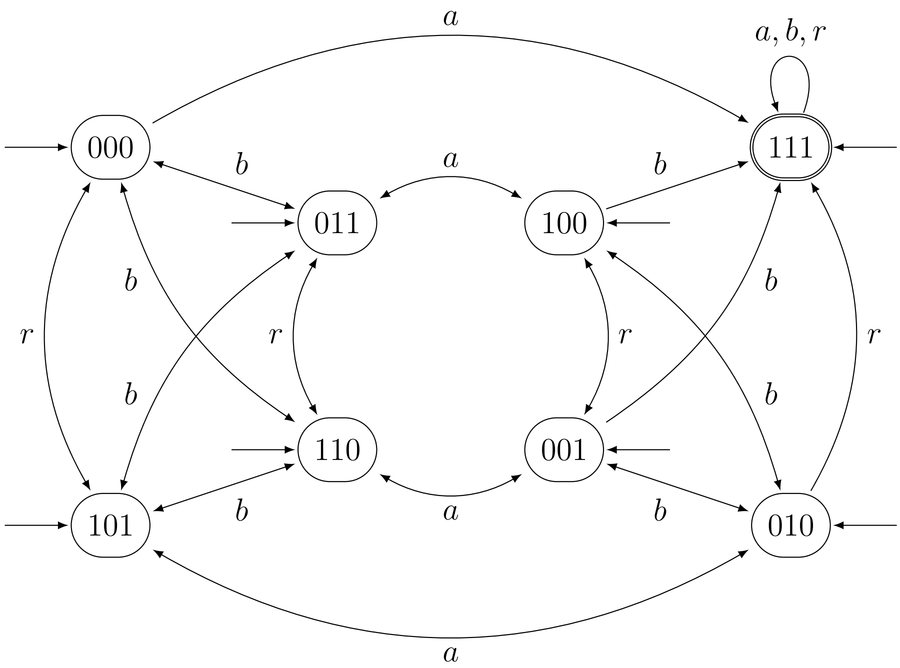
> Zuerst notieren Sie auf ein Blatt Papier eine Folge von Anweisungen. Dann legt Ihr Gegner drei Spielkarten nebeneinander auf den Tisch, jeweils auf- oder zugedeckt, und führt nacheinander die Anweisungen aus.
>
> Mögliche Anweisungen sind:
>
> a: Ihr Gegner dreht alle drei Karten um.
>
> b: Ihr Gegner dreht zwei benachbarte Karten seiner Wahl um.
>
> r: Ihr Gegner dreht die Karten an den Rändern um.
>
> Sie gewinnen das Spiel, sobald alle drei Karten aufgedeckt sind. In diesem Fall ignoriert der Gegner alle weiteren Anweisungen.

Gibt es eine Folge von Anweisungen, mit der man das Spiel mit Sicherheit gewinnt?

Überprüfen Sie Ihre Vermutung mithilfe der Automatentheorie.

Lösung

Das Spiel kann durch den folgenden NEA M modelliert werden:



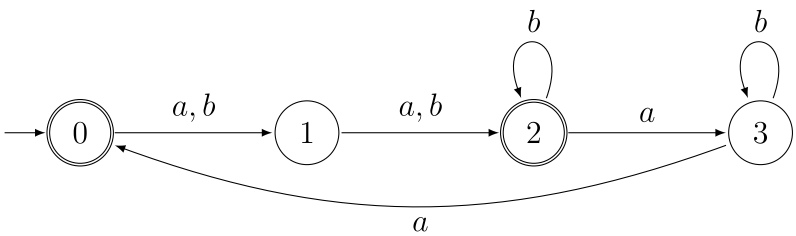
Jede 0 stellt dabei eine verschlossene Karte dar und jede 1 eine offene.

Wir vermuten, dass man für mit der Folge *arabara* mit Sicherheit gewinnt und überprüfen dies durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
&\hat{\delta}(\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}, arabara)\\
&\quad= \hat{\delta}(\{001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}, rabara)\\
&\quad= \hat{\delta}(\{000, 001, 011, 100, 110, 111\}, abara)\\
&\quad= \hat{\delta}(\{001, 011, 100, 110, 111\}, bara)\\
&\quad= \hat{\delta}(\{000, 010, 101, 111\}, ara)\\
&\quad= \hat{\delta}(\{010, 101, 111\}, ra)\\
&\quad= \hat{\delta}(\{000, 111\}, a)\\
&\quad= \hat{\delta}(\{111\}, \varepsilon)\\
&\quad= \{111\}.
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 5

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ der folgende DEA:



Gibt es ein Wort $w \in \Sigma^*$, das die jeweilige Aussage (a) erfüllt bzw. (b) nicht erfüllt?

1. $\forall p \in Q\colon \exists q \in Q\colon \hat{\delta}(q, w) = p$
2. $\forall q \in Q\colon \exists p \in Q\colon \hat{\delta}(q, w) = p$
3. $\exists p \in Q\colon \forall q \in Q\colon \hat{\delta}(q, w) = p$
4. $\exists q \in Q\colon \forall p \in Q\colon \hat{\delta}(q, w) = p$

Lösung

1. (a) Ja, z. B.: ε, a, aa und aaa.
   (b) Ja, z. B.: b, ab, ba und bb.
2. (a) Ja, alle.
   (b) Nein.
3. (a) Ja, z. B.: $bbaaab$, $bbaabb$, $abbaaab$ und $abbaabb$.
   (b) Ja, z. B.: ε, a, b und aa.
4. (a) Nein.
   (b) Ja, alle.

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Seien $b \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $b \geq 2$, $\Sigma = \{0, \dots, b-1\}$ ein Alphabet und $z_b\colon \Sigma^* \to \mathbb{N}$ eine Funktion mit:

$$z_b(a_{n-1} \dots a_0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_0, \dots, a_{n-1} \in \Sigma$.

Bestimmen Sie:

1. $z_2(1101)$
2. $z_2(01010)$
3. $z_2(11011)$
4. $z_3(0120)$
5. $z_3(1021)$
6. $z_4(123)$
7. $z_4(1203)$
8. $z_5(2401)$
9. $z_8(357)$
10. $z_{10}(00925)$

Bemerkungen:

- Man nennt $w \in \Sigma^*$ eine *Darstellung* der Zahl $z_b(w)$ zur Basis b.
- Beachten Sie für den Fall $n = 0$, dass die leere Konkatenation von Wörtern als ε und die leere Summe als 0 definiert sind. Somit folgt aus obiger Definition $z_b(\varepsilon) = 0$.

Lösung

1. 13	3. 27	5. 34	7. 99	9. 239
2. 10	4. 15	6. 27	8. 351	10. 925

Zusatzaufgabe 2

Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen grafisch einen DEA mit möglichst wenigen Zuständen an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

1. $L = \{a^n b^m \mid n \equiv m \mod 5\}$
2. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid abc$ ist ein Faktor von w, aber bb nicht$\}$

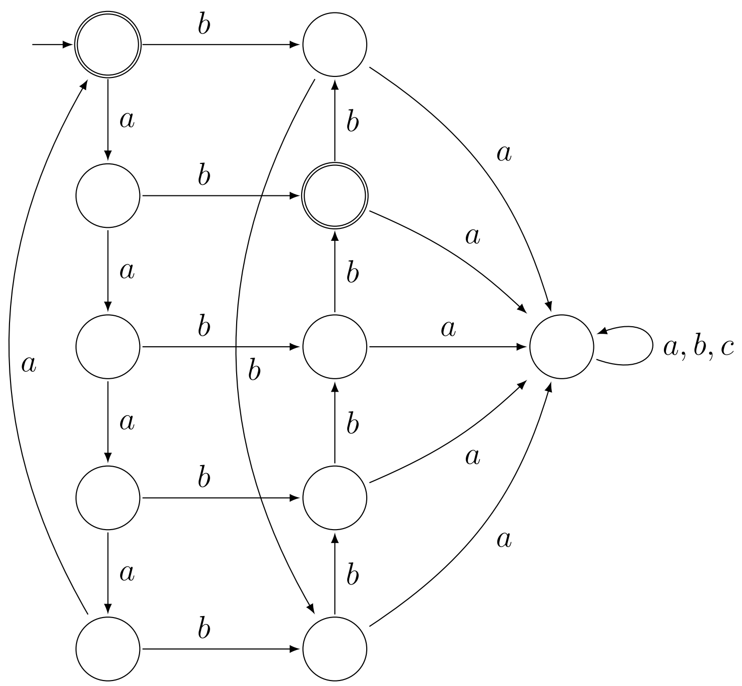
Hinweise:

- Das sind genau die Sprachen aus den Bonusaufgaben 6 und 8 auf Übungsblatt 3.
- Die Begriffe *Faktor* und *Infix* sind synonym.

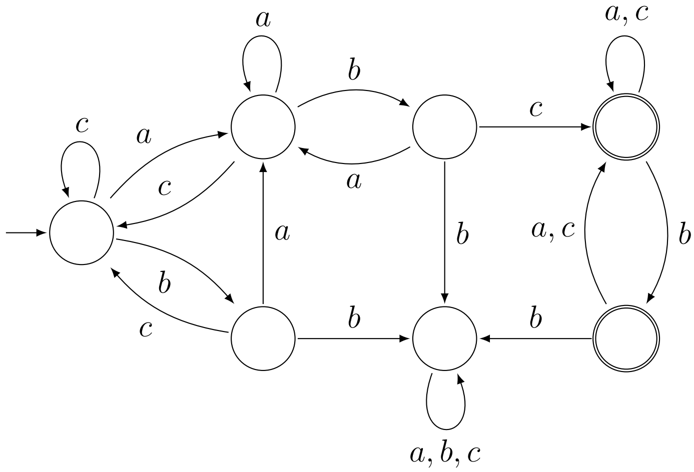
Lösung

Bis auf die Benennung der Zustände sind die Lösungen eindeutig.

1. $L = \{a^n b^m \mid n \equiv m \mod 5\}$:



2. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid abc$ ist ein Faktor von w, aber bb nicht$\}$:


a
b
c
a,c
c
a
c
a
a
b
a,c
b
b
c
b
b
a,b,c