



## Lösungen zum Ergänzungsblatt 2

*Hinweise:*

- In der Literatur sind zwei verschiedene Definitionen der natürlichen Zahlen gängig. Während in der Mathematik-I-Vorlesung  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  festgelegt wird, verwenden wir in *Theoretische Informatik I* die Bezeichnung  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Um Verwechslungen zu vermeiden, kann man die Notationen  $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, \dots\}$  und  $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N}_1$  einführen.

- Für Sprachen  $A, B$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

(a)  $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$

(b)  $A^n = \{w_1 \dots w_n \mid w_1, \dots, w_n \in A\}$  bzw.

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{für } n = 0 \\ A^{n-1}A & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

(c)  $A^+ = \{w \mid \exists n \geq 1: w \in A^n\} = \bigcup_{n \geq 1} A^n$

(d)  $A^* = \{w \mid \exists n \geq 0: w \in A^n\} = \bigcup_{n \geq 0} A^n = \{\varepsilon\} \cup A^+$

- $|w|_x$  bezeichnet die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens  $x$  im Wort  $w$ . Es gilt beispielsweise:  $|abbacb|_b = 3$ .

---

### Vorbereitungsaufgaben

---

#### Vorbereitungsaufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen gilt für eine beliebige Sprache  $L$ ? Begründen Sie die Korrektheit der Aussage oder geben Sie eine Sprache  $L$  an, die sie widerlegt.

1.  $L^+ \subseteq L^*$

3.  $\forall k \geq 0: L^k \subseteq L^*$

5.  $\varepsilon \in L^*$

2.  $\forall k \geq 1: L^k \subseteq L^+$

4.  $(L^2)^* = (L^*)^2$

6.  $L^+ = L^* \setminus \{\varepsilon\}$

## Lösung

1. Die Aussage ist richtig. Sei  $w \in L^+$  beliebig. Dann gilt per Definition  $w \in L^n$  für ein  $n \geq 1$ . Wegen  $n \geq 1 \geq 0$  gilt insbesondere  $w \in L^n$  für ein  $n \geq 0$ , also  $w \in L^*$ .
2. Die Aussage ist richtig. Seien  $k \geq 1$  und  $w \in L^k$  beliebig. Dann existiert ein  $n \geq 1$  mit  $w \in L^n$  (nämlich  $n = k$ ). Also ist  $w \in L^*$ .
3. Die Aussage ist richtig. Die Begründung ist analog zu 2.
4. Die Aussage ist falsch. Für  $L = \{a\}$  gilt  $a \in (L^*)^2$ , aber  $a \notin (L^2)^*$ .
5. Die Aussage ist richtig und folgt direkt aus  $\varepsilon \in \{\varepsilon\} = L^0 \subseteq L^*$ .
6. Die Aussage ist falsch. Für  $L = \{\varepsilon\}$  gilt  $\varepsilon \in L^+$ , aber  $\varepsilon \notin L^* \setminus \{\varepsilon\}$ .

*Hinweise:*

- Hier hätte man eine beliebige Sprache  $L$  mit  $\varepsilon \in L$  wählen können.
- In der Vorlesung wurde gesagt, dass  $\Sigma^+$ , die *freie Halbgruppe über  $\Sigma$* , als  $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$  definiert ist. Fasst man  $\Sigma$  als Sprache mit Wörtern der Länge 1 auf, so ist die oben angegebene Definition mit der in der Vorlesung kompatibel, d. h.: für  $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = 1\}$  gilt sowohl  $L^* = \Sigma^*$  als auch  $L^+ = \Sigma^+$ .

## Vorbereitungsaufgabe 2

Gegeben sei die Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit Variablenmenge  $V = \{S, A, B, C\}$ , Alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$  und Regelmenge

$$P = \{(S, aSBC), (S, aBC), (CB, BC), (aB, ab), (bB, bb), (bC, bc), (cC, cc)\}.$$

Diese 7 Produktionen lassen sich auch wie folgt darstellen:

$$S \rightarrow aSBC \mid aBC \quad CB \rightarrow BC \quad aB \rightarrow ab \quad bB \rightarrow bb \quad bC \rightarrow bc \quad cC \rightarrow cc$$

1. Wörter aus  $(V \cup \Sigma)^*$  heißen *Satzformen*. Für Satzformen  $x$  und  $y$  gilt: In  $G$  lässt sich  $y$  genau dann in einem Schritt von  $x$  ableiten (in Zeichen  $x \Rightarrow_G y$ ), wenn gilt:

$$\exists u, v, w_1, w_2 \in (V \cup \Sigma)^*: (x = w_1 u w_2 \wedge y = w_1 v w_2 \wedge (u, v) \in P).$$

Beispiele:

- Für  $u = CB$ ,  $v = BC$ ,  $w_1 = Sa$  und  $w_2 = b$  erhält man  $SaCBb \Rightarrow_G SaBCb$ .
- Es gilt  $aSc \not\Rightarrow_G abc$ , da keine entsprechende  $u, v, w_1, w_2$  existieren. Dafür müsste eine Regel  $(u, v) \in P$  existieren, so dass  $S$  in  $u$  und  $b$  in  $v$  vorkommt.

Geben Sie Satzformen  $u, v, w_1, w_2$  an, die die Korrektheit der folgenden Aussagen begründen:

(a)  $CBA \Rightarrow_G BCA$

(b)  $aBc \Rightarrow_G abc$

(c)  $abC \Rightarrow_G abc$

2. In  $G$  lässt sich  $y$  genau dann in  $n$  Schritten von  $x$  ableiten (in Zeichen  $x \Rightarrow_G^n y$ ), wenn gilt:

$$\exists w_1, \dots, w_{n-1} \in (V \cup \Sigma)^*: x \Rightarrow_G w_1 \Rightarrow_G w_2 \Rightarrow_G \dots \Rightarrow_G w_{n-1} \Rightarrow_G y.$$

Beispiel: Es gilt  $aCB \Rightarrow_G aBC \Rightarrow_G abC \Rightarrow_G abc$ , also  $aCB \Rightarrow_G^3 abc$ .

Geben Sie Ableitungsketten an, die die Korrektheit der folgenden Aussagen begründen:

- (a)  $S \Rightarrow_G^3 aaaBCBCBC$
- (b)  $BCBCBC \Rightarrow_G^3 BBBCCC$
- (c)  $aBBBCCC \Rightarrow_G^6 abbcccc$

3. In  $G$  lässt sich  $y$  genau dann von  $x$  ableiten (in Zeichen  $x \Rightarrow_G^* y$ ), wenn ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert mit  $x \Rightarrow_G^n y$ .

Zeigen Sie:  $aabbcc \in L(G)$ .

4. Von welchen Chomsky-Typen ist  $G$ ?

### Lösung

1. (a)  $u = CB, v = BC, w_1 = \varepsilon$  und  $w_2 = A$ .  
 (b)  $u = aB, v = ab, w_1 = \varepsilon$  und  $w_2 = c$ .  
 (c)  $u = bC, v = bc, w_1 = a$  und  $w_2 = \varepsilon$ .
2. (a)  $S \Rightarrow_G aSBC \Rightarrow_G aaSBCBC \Rightarrow_G aaaBCBCBC$ .  
 (b)  $BCBCBC \Rightarrow_G BBCCBC \Rightarrow_G BBCBCC \Rightarrow_G BBBCCC$ .  
 (c)  $aBBBCCC \Rightarrow_G abBBCCC \Rightarrow_G abbBCCC \Rightarrow_G abbbCCC \Rightarrow_G abbbcCC \Rightarrow_G abbccC \Rightarrow_G abbcccc$ .
3. Aus Teil 2 folgt

$$S \Rightarrow_G^3 aaaBCBCBC \Rightarrow_G^3 aaaBBBCCC \Rightarrow_G^6 aaabbcccc,$$

d. h.  $S \Rightarrow_G^{12} aaabbcccc$  und somit auch  $S \Rightarrow_G^* aaabbcccc$ .

4.  $G$  ist vom Typ 0 und 1, aber weder vom Typ 2 noch vom Typ 3.

### Vorbereitungsaufgabe 3

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$  ein Alphabet. Von welchem Chomsky-Typ sind folgende Grammatiken und welche Sprachen über  $\Sigma$  erzeugen sie?

1.  $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$  mit Produktionen  $S \rightarrow aSb \mid ab$ .
2.  $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$  mit Produktionen  $S \rightarrow aS \mid bS \mid a \mid b$ .
3.  $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$  mit Produktionen  $S \rightarrow TS \mid Ta$  und  $TT \rightarrow aT$ .

## Lösung

1.  $G$  ist vom Typ 2 und erzeugt  $L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ .
2.  $G$  ist vom Typ 3 und erzeugt  $L(G) = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\} = \Sigma^+$ .
3.  $G$  ist vom Typ 1 und erzeugt  $L(G) = \emptyset$ .

## Vorbereitungsaufgabe 4

Geben Sie eine Typ-3-Grammatik  $G$  mit  $L(G) = \{a^m b^n \mid m, n \geq 1\}$  an.

## Lösung

$G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$  mit Produktionen  $S \rightarrow aS \mid aT$  und  $T \rightarrow bT \mid b$ .

---

# Präsenzaufgaben

---

## Präsenzaufgabe 1

Zeigen Sie für beliebige Sprachen  $A$ ,  $B$  und  $C$  über einem Alphabet  $\Sigma$ :

1.  $A \subseteq B \implies A^* \subseteq B^*$
2.  $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$
3.  $A^* A^* = A^*$
4.  $(A^*)^* = A^*$

## Lösung

1. Angenommen, es gilt  $A \subseteq B$ . Sei  $w \in A^*$  beliebig. Dann ist  $w = w_1 \dots w_n$  für ein  $n \geq 0$  und Wörter  $w_1, \dots, w_n \in A$ . Nach der Annahme  $A \subseteq B$  ist  $w = w_1 \dots w_n$  für ein  $n \geq 0$  und Wörter  $w_1, \dots, w_n \in B$ , also  $w \in B^*$ .  $\square$
2. Sei  $w \in A(B \cap C)$  beliebig. Dann ist  $w = uv$  für Wörter  $u \in A$  und  $v \in B \cap C$ , d. h.  $u \in A$ ,  $v \in B$  und  $v \in C$ . Daraus folgt  $w \in AB$  und  $w \in AC$  und somit  $w \in AB \cap AC$ .  $\square$
3.  $A^* A^* \subseteq A^*$

Sei  $w \in A^* A^*$  beliebig. Dann ist  $w = uv$  für Wörter  $u, v \in A^*$ , d. h. es gibt Zahlen  $l, m \geq 0$  und Wörter  $u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_m \in A$  mit  $w = u_1 \dots u_l v_1 \dots v_m$ . Wähle  $n = l + m$ . Dann gilt  $n \geq 0$  und durch Umbenennung der Variablen erhalten wir Wörter  $w_1, \dots, w_n \in A$  mit  $w = w_1 \dots w_n$ . Somit ist  $w \in A^*$ .

$$\underline{A^* \subseteq A^* A^*}$$

Sei  $w \in A^*$  beliebig. Wegen  $\varepsilon \in A^*$  (siehe Vorbereitungsaufgabe 1) ist  $w = w\varepsilon \in A^* A^*$ .  $\square$

4. Wir zeigen zuerst  $\forall n \geq 1: (A^*)^n = A^*$  mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang

Für  $n = 1$  gilt per Definition  $(A^*)^1 = A^*$ .

Induktionsschritt

Sei  $n \geq 1$  beliebig. Angenommen, es gilt die Induktionsvoraussetzung  $(A^*)^n = A^*$ .  
Dann gilt:

$$(A^*)^{n+1} = (A^*)^n A^* \stackrel{\text{IV}}{=} A^* A^* \stackrel{\text{3.}}{=} A^*.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt  $(A^*)^n = A^*$  für alle  $n \geq 1$ .

Nun beweisen wir  $(A^*)^* = A^*$ .

$(A^*)^* \subseteq A^*$

Sei  $w \in (A^*)^*$  beliebig. Dann existiert ein  $n \geq 0$  mit  $w \in (A^*)^n$ .

1. Fall:  $n = 0$

Dann ist  $w = \varepsilon \in A^*$ .

2. Fall:  $n \geq 1$

Dann ist  $w \in (A^*)^n = A^*$ .

In beiden Fällen ist  $w \in A^*$

$A^* \subseteq (A^*)^*$

Aus Vorbereitungsaufgabe 1 folgt:  $A^* = (A^*)^1 \subseteq (A^*)^*$ .

*Hinweis:* Man hätte diese Gleichung analog zu Teil 3 beweisen können. Die Wahl eines Induktionsbeweises war mehr didaktischer Natur.

## Präsenzaufgabe 2

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$  ein Alphabet. Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen  $L$  über  $\Sigma$  eine Grammatik  $G$  mit  $L = L(G)$  an.

1.  $L = \{a^m b^n \mid m < n\}$
2.  $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ ist gerade}\}$
3.  $L = \{a^k b^l a^m \mid k = l \vee l = m\}$

## Lösung

Wir geben einige von vielen möglichen Grammatiken an.

- $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$  mit Produktionen  $S \rightarrow aSb \mid Sb \mid b$
  - $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$  mit Produktionen  $S \rightarrow aSb \mid T$  und  $T \rightarrow bT \mid b$
- $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$  mit Produktionen  $S \rightarrow SaSaS \mid Sb \mid \varepsilon$
  - $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$  mit Produktionen  $S \rightarrow SS \mid aSa \mid Sb \mid \varepsilon$
  - $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$  mit Produktionen  $S \rightarrow aSa \mid Sb \mid bS \mid \varepsilon$
- $G = (\{S, T, U, V\}, \Sigma, P, S)$  mit Produktionen  $S \rightarrow VT \mid UV$ ,  $T \rightarrow bTa \mid \varepsilon$ ,  
 $U \rightarrow aUb \mid \varepsilon$  und  $V \rightarrow aV \mid \varepsilon$

## Präsenzaufgabe 3

Sei  $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$  eine Grammatik mit  $\Sigma = \{a, b\}$  und Produktionen

$$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid SS \mid \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass  $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$  die von  $G$  erzeugte Sprache ist.

## Lösung

Weil die Aufgabe in der Ergänzung nicht besprochen werden konnte und sie dennoch für die Bearbeitung der Hausaufgaben hilfreich sein kann, gibt es eine besonders ausführliche Lösung dazu. Zuerst wird die Beweisidee erläutert und danach der geforderte Beweis durchgeführt. Es wird natürlich nicht erwartet, dass Studierende in der zweiten Woche des ersten Semesters von alleine auf einen solchen Ansatz kommen. Wichtig ist hierbei den verwendeten Ansatz zu verstehen und später in ähnlichen Situationen korrekt anwenden zu können.

## Beweisidee

Zu zeigen ist die Mengengleichheit  $L(G) = L$ , d. h. die Aussage

$$\forall w \in \Sigma^* : (w \in L(G) \iff w \in L).$$

Wie üblich zeigen wir beide Richtungen der Äquivalenz getrennt voneinander.

Die Richtung  $\forall w \in \Sigma^* : (w \in L(G) \implies w \in L)$

Wegen

$$\begin{aligned} \forall w \in \Sigma^* : (w \in L(G) \implies w \in L) \\ \iff \forall w \in \Sigma^* : (S \Rightarrow_G^* w \implies |w|_a = |w|_b) \\ \iff \forall w \in \Sigma^* : (\exists n \geq 1 : S \Rightarrow_G^n w \implies |w|_a = |w|_b) \\ \iff \forall w \in \Sigma^* : \forall n \geq 1 : (S \Rightarrow_G^n w \implies |w|_a = |w|_b) \\ \iff \forall n \geq 1 : \underbrace{\forall w \in \Sigma^* : (S \Rightarrow_G^n w \implies |w|_a = |w|_b)}_{P(n)} \end{aligned}$$

verwenden wir starke Induktion, um die Aussage  $\forall n \geq 1 : P(n)$  zu zeigen.

### Induktionsanfang

Hier muss  $P(1)$  gezeigt werden, d. h.  $\forall w \in \Sigma^* : (S \Rightarrow_G w \implies |w|_a = |w|_b)$ .

### Induktionsschritt

Zu zeigen ist für jedes  $n \geq 1$  die Implikation

$$(P(1) \wedge \dots \wedge P(n)) \implies P(n+1).$$

Die Induktionsvoraussetzung  $P(1) \wedge \dots \wedge P(n)$  ist

$$\forall w \in \Sigma^* : (S \Rightarrow_G^m w \implies |w|_a = |w|_b)$$

für alle  $m \leq n$ . Dies lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$\forall w \in \Sigma^* : (S \Rightarrow_G^{\leq n} w \implies |w|_a = |w|_b).$$

Daher nehmen wir an, dass jedes Wort  $w$ , das sich in höchstens  $n$  Schritten von  $S$  ableiten lässt, die Gleichung  $|w|_a = |w|_b$  erfüllt.

Im Induktionsschritt soll dann unter dieser Annahme die Aussage  $P(n+1)$  gezeigt werden, d. h.

$$\forall w' \in \Sigma^* : (S \Rightarrow_G^{n+1} w' \implies |w'|_a = |w'|_b).$$

Hierbei verwenden wir  $w'$  statt  $w$ , um Verwechslungen mit der Variable  $w$  aus der Induktionsvoraussetzung zu vermeiden.  $w'$  ist also länger als  $w$ .

Wir zeigen also für ein beliebiges  $w' \in \Sigma^*$  mit  $S \Rightarrow_G^{n+1} w'$ , dass  $w'$  die Gleichung  $|w'|_a = |w'|_b$  erfüllt. Dabei dürfen wir davon ausgehen, dass jedes  $w \in \Sigma^*$  mit  $S \Rightarrow_G^{\leq n} w$  ebenfalls die Gleichung  $|w|_a = |w|_b$  erfüllt.

### Die Richtung $\forall w \in \Sigma^* : (w \in L \implies w \in L(G))$

Analog zur anderen Richtung bringen wir die zu beweisende Aussage in eine Aussage der Form  $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$  über und zeigen diese mit starker Induktion nach  $n$ . Damit die Implikation eine Annahme der Form  $\exists n \in \mathbb{N} : Q(n)$  hat, ersetzen wir die Aussage  $|w|_a = |w|_b$  durch die äquivalente Aussage  $\exists n \in \mathbb{N} : (|w|_a = n \wedge |w|_b = n)$  bzw.  $\exists n \in \mathbb{N} : |w|_a = |w|_b = n$ . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \forall w \in \Sigma^* : (w \in L \implies w \in L(G)) \\ & \iff \forall w \in \Sigma^* : (|w|_a = |w|_b \implies S \Rightarrow_G^* w) \\ & \iff \forall w \in \Sigma^* : (\exists n \geq 0 : |w|_a = |w|_b = n \implies S \Rightarrow_G^* w) \\ & \iff \forall w \in \Sigma^* : \forall n \geq 0 : (|w|_a = |w|_b = n \implies S \Rightarrow_G^* w) \\ & \iff \forall n \geq 0 : \underbrace{\forall w \in \Sigma^* : (|w|_a = |w|_b = n \implies S \Rightarrow_G^* w)}_{P(n)}. \end{aligned}$$

Der Beweis der Aussage  $\forall n \geq 0 : P(n)$  erfolgt wieder mit starker Induktion nach  $n$ .

### Induktionsanfang

Hier muss  $P(0)$ , d. h.  $\forall w \in \Sigma^* : (|w|_a = |w|_b = 0 \implies S \Rightarrow_G^* w)$  gezeigt werden.

### Induktionsschritt

Zu zeigen ist für jedes  $n \geq 0$  die Implikation

$$(P(0) \wedge \dots \wedge P(n)) \implies P(n+1).$$

Die Induktionsvoraussetzung  $P(0) \wedge \dots \wedge P(n)$  ist

$$\forall w \in \Sigma^*: (|w|_a = |w|_b = m \implies S \Rightarrow_G^* w)$$

für alle  $m \leq n$ . Dies lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$\forall w \in \Sigma^*: (|w|_a = |w|_b \leq n \implies S \Rightarrow_G^* w)$$

Daher nehmen wir an, dass jedes Wort  $w$ , das höchstens  $n$   $a$ s und gleich viele  $b$ s hat, sich von  $S$  ableiten lässt.

Unter der Annahme  $P(0) \wedge \dots \wedge P(n)$  soll danach die Aussage  $P(n+1)$  gezeigt werden, d. h.

$$\forall w' \in \Sigma^*: (|w'|_a = |w'|_b = n+1 \implies S \Rightarrow_G^* w').$$

Wir zeigen also für ein beliebiges  $w' \in \Sigma^*$  mit  $|w'|_a = |w'|_b = n+1$ , dass  $S \Rightarrow_G^* w'$  gilt. Dabei dürfen wir nach Induktionsvoraussetzung davon ausgehen, dass für jedes  $w \in \Sigma^*$  mit  $|w|_a = |w|_b \leq n$  ebenfalls  $S \Rightarrow_G^* w$  gilt. Auch hier verwenden wir  $w'$  statt  $w$ , um Verwechslungen zu vermeiden.

### **Der eigentliche Beweis**

Wir zeigen beide Inklusionen getrennt voneinander.

#### Beweis von $L(G) \subseteq L$

Wir zeigen die dazu äquivalente Aussage

$$\forall n \geq 1: \forall w \in \Sigma^*: (S \Rightarrow_G^n w \implies |w|_a = |w|_b)$$

mit starker Induktion nach  $n$ .

#### Induktionsanfang

Für  $n = 1$  folgt aus  $S \Rightarrow_G^n w$  und  $w \in \Sigma^*$  sofort  $w = \varepsilon$  und somit  $|w|_a = 0 = |w|_b$ .

#### Induktionsschritt

Sei  $n \geq 1$  beliebig. Nach Induktionsvoraussetzung erfüllt jedes  $w \in \Sigma^*$  mit  $S \Rightarrow_G^{\leq n} w$  die Gleichung  $|w|_a = |w|_b$ . Sei nun  $w' \in \Sigma^*$  mit  $S \Rightarrow_G^{n+1} w'$  beliebig. Wir unterscheiden drei Fälle.

$$\text{Fall 1: } S \Rightarrow_G aSb \Rightarrow_G^n w'$$

Dann existiert ein  $w \in \Sigma^*$  mit  $w' = awb$  und  $S \Rightarrow_G^n w$ . Es folgt:

$$|w'|_a = |awb|_a = 1 + |w|_a \stackrel{\text{IV}}{=} 1 + |w|_b = |awb|_b = |w'|_b.$$



Fall 2:  $S \Rightarrow_G bSa \Rightarrow_G^n w'$

Analog zu Fall 1.

Fall 3:  $S \Rightarrow_G SS \Rightarrow_G^n w'$

Dann existieren  $w_1, w_2 \in \Sigma^*$  mit  $w' = w_1w_2$  und  $S \Rightarrow_G^{\leq n} w_1, w_2$ . Es folgt:

$$|w'|_a = |w_1w_2|_a = |w_1|_a + |w_2|_a \stackrel{\text{IV}}{=} |w_1|_b + |w_2|_b = |w_1w_2|_b = |w'|_b.$$

In allen drei Fällen gilt  $|w'|_a = |w'|_b$ . □

Beweis von  $\forall w \in \Sigma^*: (w \in L \implies w \in L(G))$

Wir zeigen die dazu äquivalente Aussage

$$\forall n \geq 0: \forall w \in \Sigma^*: (|w|_a = |w|_b = n \implies S \Rightarrow_G^* w)$$

mit starker Induktion nach  $n$ .

Induktionsanfang

Für  $n = 0$  folgt aus  $|w|_a = |w|_b = 0$  sofort  $w = \varepsilon$ . Wegen  $S \Rightarrow_G \varepsilon$  gilt auch  $S \Rightarrow_G^* w$ .

Induktionsschritt

Sei  $n \geq 0$  beliebig. Nach Induktionsvoraussetzung ist jedes  $w \in \Sigma^*$  mit  $|w|_a = |w|_b \leq n$  von  $S$  ableitbar, d. h.  $S \Rightarrow_G^* u$ . Sei nun  $w' \in \Sigma^*$  mit  $|w'|_a = |w'|_b = n + 1$ . Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1:  $w'$  beginnt mit  $a$  und endet mit  $b$

Dann existiert ein  $w \in \Sigma^*$  mit  $w' = awb$ . Für dieses  $w$  gilt  $|w|_a = |w|_b = n$ . Dann folgt für  $w'$ :

$$S \Rightarrow_G aSb \stackrel{\text{IV}}{\Rightarrow_G^*} awb = w'.$$

Fall 2:  $w'$  beginnt mit  $b$  und endet mit  $a$

Analog zu Fall 1.

Fall 3:  $w'$  beginnt und endet mit  $a$

Dann existiert ein  $w \in \Sigma^*$  mit  $w' = awa$ . Für dieses  $w$  gilt zwar  $|w|_b = n$ , aber  $|w|_a = n - 2$ . Aus  $|a|_a = |a|_b + 1$  und  $|aw|_a = |aw|_b - 1$  folgt, dass  $w_1, w_2 \in \Sigma^*$  existieren müssen mit  $w = w_1w_2$  und  $|aw_1|_a = |aw_1|_b$ . Dann gilt auch  $|aw_2|_a = |aw_2|_b$  und für  $w'$  folgt:

$$S \Rightarrow_G SS \stackrel{\text{IV}}{\Rightarrow_G^*} aw_1w_2a = w'.$$

Fall 4:  $w'$  beginnt und endet mit  $b$

Analog zu Fall 3.

In allen drei Fällen gilt  $S \Rightarrow_G^* w'$ . □

---

## Zusatzaufgaben

---

### Zusatzaufgabe 1

Zeigen Sie für beliebige Sprachen  $A$ ,  $B$  und  $C$ :

1.  $A^+ \subseteq A \iff A^2 \subseteq A$
2.  $AB = BC \implies A^*B = BC^*$

### Lösung

1.  $A^+ \subseteq A \implies A^2 \subseteq A$

Angenommen, es gilt  $A^+ \subseteq A$ . Sei  $w \in A^2$  beliebig. Dann existiert ein  $n \geq 1$  mit  $w \in A^n$  (nämlich  $n = 2$ ).

$$\underline{A^2 \subseteq A \implies A^+ \subseteq A}$$

Angenommen, es gilt  $A^2 \subseteq A$ . Wir zeigen mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_1: A^n \subseteq A.$$

#### Induktionsanfang

Für  $n = 1$  gilt per Definition  $A^1 = A$ .

#### Induktionsschritt

Sei  $n \in \mathbb{N}_1$  beliebig. Angenommen, es gilt  $A^n \subseteq A$ . Zu zeigen ist  $A^{n+1} \subseteq A$ .

Sei also  $w \in A^{n+1}$  beliebig. Dann ist  $w = uv$  für Wörter  $u \in A^n$  und  $v \in A$ .  
Nach Induktionsvoraussetzung gilt  $u \in A$ , d. h.  $w \in AA = A^2 \subseteq A$ .

Nun verwenden wir diese Aussage, um  $A^+ \subseteq A$  zu zeigen.

Sei also  $w \in A^+$  beliebig. Dann existiert ein  $n \geq 1$  mit  $w \in A^n$ . Wegen  $A^n \subseteq A$  ist  $w \in A$ .  $\square$

2. Angenommen, es gilt  $AB = BC$ . Wir zeigen mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}: A^n B = BC^n.$$

#### Induktionsanfang

$$A^0 B = \{\varepsilon\}B = B = B\{\varepsilon\} = BC^0.$$

#### Induktionsschritt

Sei  $n \in \mathbb{N}_1$  beliebig. Angenommen, es gilt  $A^n B = BC^n$ . Zu zeigen ist  $A^{n+1} B = BC^{n+1}$ . Tatsächlich gilt:

$$A^{n+1} B = A^n AB = A^n BC \stackrel{IV}{=} BC^n C = BC^{n+1}.$$

Nun verwenden wir diese Aussage, um  $A^*B = BC^*$  zu zeigen, wobei wir diesmal durch Äquivalenzumformungen beide Richtungen auf einmal zeigen.

Sei  $w \in \Sigma^*$  beliebig. Dann folgt:

$$\begin{aligned} w \in A^*B &\iff w \in A^nB \text{ für ein } n \geq 0 \\ &\iff w \in BC^n \text{ für ein } n \geq 0 \\ &\iff w \in BC^* \end{aligned}$$

Daraus folgt  $A^*B = BC^*$ . □

*Wichtig:*

Bei Äquivalenzumformungen soll man immer darauf achten, dass jede Äquivalenz tatsächlich eine solche ist. Oft überprüft man nur eine Richtung und schreibt trotzdem einen Äquivalenzpfeil statt nur einen Implikationspfeil.

## Zusatzaufgabe 2

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$  ein Alphabet. Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen  $L$  über  $\Sigma$  eine Grammatik  $G$  mit  $L = L(G)$  an.

1.  $L = \{a^m b^m a^n b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
2.  $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommen zwei } bs \text{ nebeneinander vor}\}$
3.  $L = \{a^m b^n a^n b^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

## Lösung

Wir geben für jede Sprache eine mögliche Grammatik an.

1.  $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$  mit Produktionen  $S \rightarrow TU$ ,  $T \rightarrow aTb \mid \varepsilon$  und  $U \rightarrow aUb \mid \varepsilon$ .
2.  $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$  mit Produktionen  $S \rightarrow TbbT$  und  $T \rightarrow aT \mid bT \mid \varepsilon$ .
3.  $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$  mit Produktionen  $S \rightarrow aSb \mid T$  und  $T \rightarrow bTa \mid \varepsilon$ .