Lösungen zum Ergänzungsblatt 1

Hinweise:

- Alle Informationen und Materialien zur Veranstaltung befinden sich auf

  `www.fmi.uni-stuttgart.de/ti/teaching/w18/eti1`.

- Die in dieser Ergänzung behandelten Themen beziehen sich auf die Abschnitte 1.1, 1.2 und 1.3 der Vorlesung *Mathematik 1 für inf, swt, msv*. Das Vorlesungskript ist unter

  `info.mathematik.uni-stuttgart.de/Mathe1InfWS1819/skr/Skript.pdf`

  zu finden.

- In der Literatur sind zwei verschiedene Definitionen der natürlichen Zahlen gängig. Während in der Mathematik-I-Vorlesung $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ festgelegt wird, verwenden wir in *Theoretische Informatik I* die Bezeichnung $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Um Verwechslungen zu vermeiden, kann man die Notationen $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$ und $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N}_1$ einführen.

Vorbereitungsaufgaben

Keine Vorbereitungsaufgaben.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

1. $1 \subseteq \{1, 2, 3\}$
2. $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3\}$
3. $\{1, 3\} \in \{1, 2, 3\}$
4. $\{\{1\}, \{2\}\} = \{1, 2\}$
5. $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$
6. $\{1\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}\}$
7. $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
8. $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
9. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
10. $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
11. $\emptyset \in \{1, 2, 3\}$
12. $\emptyset \in \{\emptyset, 1, \{1, 2\}, \{\{2\}\}\}$

Lösung

1. $1 \not\subseteq \{1,2,3\}$
2. $\emptyset \subseteq \{1,2,3\}$
3. $\{1,3\} \notin \{1,2,3\}$
4. $\{\{1\},\{2\}\} \neq \{1,2\}$
5. $\{1\} \in \{\{1\},\{2\}\}$
6. $\{1\} \not\subseteq \{\{1\},\{2\}\}$
7. $\emptyset \in \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$
8. $\emptyset \subseteq \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$
9. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$
10. $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$
11. $\emptyset \notin \{1,2,3\}$
12. $\emptyset \in \{\emptyset,1,\{1,2\},\{\{2\}\}\}$

Präsenzaufgabe 2

Geben Sie die Kardinalitäten der folgenden Mengen an.

1. $A = \{1,2,3,4,5\}$
2. $B = \{1,3,2,3,2,3\}$
3. $C = \{\{1,2,3\}\}$
4. $D = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$
5. $E = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$

Lösung

1. $|A| = 5$
2. $|B| = 3$
3. $|C| = 1$
4. $|D| = 2$
5. $|E| = 3$

Präsenzaufgabe 3

Geben Sie eine Mengendarstellung für folgende Mengen an.

1. Die Menge $A = \{0,1,4,9,16,25,36,\ldots\}$ aller Quadratzahlen.
2. Die Menge $B = \{0,\ldots,100\}$ aller natürlichen Zahlen zwischen 0 und 100.
3. Die Menge $C = \{1,2,4,8,16,32,64,\ldots\}$ aller Zweierpotenzen.
4. Die Menge $D = \{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$ aller ungeraden Zahlen.
5. Die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen, d. h. die Menge aller Brüche.
6. Die Menge $\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,13,17,\ldots\}$ aller Primzahlen.

Lösung

1. $A = \{n \mid \exists m\colon n = m^2 \land m \in \mathbb{N}\} = \{m^2 \mid m \in \mathbb{N}\}$
2. $B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \land n \leq 100\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 100\}$
3. $C = \{n \mid \exists m\colon n = 2^m \land m \in \mathbb{N}\} = \{2^m \mid m \in \mathbb{N}\}$
4. $D = \{n \mid \exists m\colon n = 2m+1 \land m \in \mathbb{Z}\} = \{2m+1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$
5. $\mathbb{Q} = \{x \mid \exists p,q\colon x = \frac{p}{q} \land p \in \mathbb{Z} \land q \in \mathbb{N}_1\} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \land q \in \mathbb{N}_1\}$
6. $\mathbb{P} = \{p \mid p \in \mathbb{N} \land \forall m,n\colon (m,n \in \mathbb{N}_2 \implies p \neq mn)\}$
   $= \{p \in \mathbb{N} \mid \forall m,n\colon (m,n \in \mathbb{N}_2 \implies p \neq mn)\}$

Präsenzaufgabe 4

Geben Sie folgende Mengen als Auflistung aller Elemente an.

1. $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n < 6\}$
2. $B = \{n + 5 \mid n \in \{0, 1, 2, 3\}\}$
3. $C = \{|n - 4| \mid n \in \mathbb{N} \land 1 \leq n \leq 7\}$
4. $D = \{2n \mid n \in \{1, 2, 3, 4\}\}$
5. $E = \{n \mid 2n \in \{1, 2, 3, 4\}\}$

Lösung

1. $A = \{3, 4, 5\}$
2. $B = \{0 + 5, 1 + 5, 2 + 5, 3 + 5\} = \{5, 6, 7, 8\}$
3. $C = \{|-3|, |-2|, |-1|, 0, 1, 2, 3\} = \{3, 2, 1, 0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$
4. $D = \{2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4\} = \{2, 4, 6, 8\}$
5. $E = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\} = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$

Präsenzaufgabe 5

Für beliebige Mengen A und B gilt:

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$, z. B. $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$, z. B. $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$.
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$, z. B. $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$.
- $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$, z. B.

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

- $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \land y \in B\}$, z. B.

$$\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

Sind A und B zudem Sprachen (d. h. Mengen von Wörtern), dann gilt:

- $A \cdot B = \{uv \mid u \in A \land v \in B\}$, z. B. $\{a, ab\} \cdot \{b, cc\} = \{ab, acc, abb, abcc\}$.
- $A^n = \{w_1 \dots w_n \mid w_1, \dots, w_n \in A\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, z. B.

$$\{a, b\}^3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}.$$

- $A^+ = \{w \mid \text{es gibt ein } n \geq 1 \text{ mit } w \in A^n\}$
- $A^* = \{w \mid \text{es gibt ein } n \geq 0 \text{ mit } w \in A^n\}$

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ die Sprachen $A = \{\varepsilon, bb\}$, $B = \{a, aa\}$ und $C = \{b, ab\}$ über Σ. Geben Sie eine möglichst einfache Mengendarstellung folgender Mengen an. Welche Kardinalitäten haben sie? Welche davon sind Sprachen?

1. $B \cdot C$
2. $B \times C$
3. $(A \cdot C) \cap (B \cdot C)$
4. $(A \cap B) \cdot C$

Lösung

1. $B \cdot C = \{ab, aab, aab, aaab\} = \{ab, aab, aaab\}$ ist eine Sprache mit Kardinalität 3.
2. $B \times C = \{(a, b), (a, ab), (aa, b), (aa, ab)\}$ hat Kardinalität 4 und ist keine Sprache.
3. $(A \cdot C) \cap (B \cdot C) = \{b, ab, bbb, bbab\} \cap \{ab, aab, aab, aaab\} = \{ab\}$ ist eine Sprache mit Kardinalität 1.
4. $(A \cap B) \cdot C = \emptyset \cdot C = \emptyset$ ist eine Sprache mit Kardinalität 0.

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Geben Sie folgende Mengen als Auflistung aller Elemente an.

1. $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n - 5| \leq 2\}$
2. $B = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge a \leq b \leq a + 4\}$

Lösung

1. $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
2. $B = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$

Zusatzaufgabe 2

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

1. Sei $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq 5\}$. Geben Sie eine Mengendarstellung von L^n an.
2. Sei $L_n = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = n \wedge |w|_b = 2\}$. Bestimmen Sie $|L_n|$ in Abhängigkeit von n.

Hinweise:

- $|w|$ bezeichnet die Länge des Wortes w (z. B. $|abbab| = 5$).
- $|w|_x$ bezeichnet die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens x im Wort w (z. B. $|abbab|_b = 3$).

Lösung

1. $L^n = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq 5n\}$.
2. $|L_n| = \frac{n(n-1)}{2}$.

Zusatzaufgabe 3

Wie in Präsenzaufgabe 5 seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ die Sprachen $A = \{\varepsilon, bb\}$, $B = \{a, aa\}$ und $C = \{b, ab\}$ über Σ. Geben Sie eine möglichst einfache Mengendarstellung folgender Mengen an. Welche Kardinalitäten haben sie? Welche davon sind Sprachen?

1. $A \cdot B$
2. $B \cdot A$
3. $\mathcal{P}(A)$
4. $(B \cap C) \times A$
5. $C^2 \backslash (A \cup (B \cdot A))$
6. $\mathcal{P}(B^0)$
7. C^*
8. $\mathcal{P}(\emptyset)$
9. A^2
10. $(B \cap C)^+$
11. $(A \setminus A^2)^*$
12. $A \cdot B \cdot C$
13. A^*
14. $C \cdot B \cdot A$
15. $(B \cup C)^2$
16. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

Lösung

1. $A \cdot B = \{a, aa, bba, bbaa\}$ ist eine Sprache mit Kardinalität 4.
2. $B \cdot A = \{a, abb, aa, aabb\}$ ist eine Sprache mit Kardinalität 4.
3. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\varepsilon\}, \{bb\}, \{\varepsilon, bb\}\}$ hat Kardinalität 4 und ist keine Sprache.
4. $(B \cap C) \times A = \emptyset \times A = \emptyset$ ist eine Sprache mit Kardinalität 0.
5. $C^2 \setminus (A \cup (B \cdot A)) = \{bab, abab\}$ ist eine Sprache mit Kardinalität 2.
6. $\mathcal{P}(B^0) = \mathcal{P}(\{\varepsilon\}) = \{\emptyset, \{\varepsilon\}\}$ hat Kardinalität 2 und ist keine Sprache.
7. $C^* = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommt nach jedem } a \text{ unmittelbar ein } b\}$ ist eine Sprache mit unendlicher Kardinalität.
8. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ hat Kardinalität 1 und ist keine Sprache.
9. $A^2 = \{\varepsilon, bb, bb, bbbb\} = \{\varepsilon, bb, bbbb\}$ ist eine Sprache mit Kardinalität 3.
10. $(B \cap C)^+ = \emptyset^+ = \emptyset$ ist eine Sprache mit Kardinalität 0.
11. $(A \setminus A^2)^* = \emptyset^* = \{\varepsilon\}$ ist eine Sprache mit Kardinalität 1.
12. $A \cdot B \cdot C = \{ab, aab, aaab, bbab, bbaab, bbaaab\}$ ist eine Sprache mit Kardinalität 6.
13. $A^* = \{(bb)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Sprache mit unendlicher Kardinalität.
14. $C \cdot B \cdot A = \{ba, babb, baa, baabb, aba, ababb, abaa, abaabb\}$ ist eine Sprache mit Kardinalität 8.
15. $(B \cup C)^2 = \{aa, aaa, ab, aab, aaaa, aaab, ba, baa, bb, bab, aba, abaa, abb, abab\}$ ist eine Sprache mit Kardinalität 14.
16. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ hat Kardinalität 2 und ist keine Sprache.