Knobelblatt

Frohes Knobeln! Fragen und Lösungsvorschläge sind herzlich willkommen.

Knobelaufgabe 1

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen und A und B Sprachen mit $|A| = m$ und $|B| = n$.

Bekanntlich ist mn ist eine obere Schranke für $|AB|$, weil für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|AB| \leq mn$ gilt. Die Schranke ist außerdem scharf, weil für alle $m, n \in \mathbb{N}$ Sprachen A, B existieren mit $|AB| = mn$, z. B. $A = \left\{a^k \,\middle|\, 1 \leq k \leq m\right\}$ und $B = \left\{b^k \,\middle|\, 1 \leq k \leq n\right\}$.

1. Geben Sie eine scharfe untere Schranke $s(m, n)$ für $|AB|$ an.

   Hinweis: Betrachten Sie die Fälle (1) $m = 0 \vee n = 0$ und (2) $m, n > 0$ getrennt.

2. Zeigen Sie, dass $s(m, n)$ eine untere Schranke ist, indem Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung zeigen:
   $$|AB| \geq s(m, n).$$

3. Zeigen Sie, dass $s(m, n)$ eine scharfe Schranke ist, indem Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ Sprachen A und B angeben mit $|AB| = s(m, n)$.

Knobelaufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie: Für jede beliebige Sprache L gilt

$$L \subseteq L^3 \implies L \subseteq L^2.$$

Hinweise:

- Wenn die Aussage stimmt, nehmen Sie an, dass eine beliebige Sprache L die Inklusion $L \subseteq L^3$ erfüllt und zeigen Sie danach, dass diese Sprache auch die Inklusion $L \subseteq L^2$ erfüllen muss.
- Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an. Ein Gegenbeipiel wäre in diesem Fall eine Sprache L mit $L \subseteq L^3$ und $L \not\subseteq L^2$.

Knobelaufgabe 3

Geben Sie eine möglichst einfache Typ-1-Grammatik an, die die Sprache $L = \{a^m b^n a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ erzeugt.

Knobelaufgabe 4

Die *Černý-Vermutung* besagt, dass $(n-1)^2$ eine obere Schranke für die Länge des kürzesten synchronisierenden Wortes eines DEA mit n Zuständen ist (vgl. Übungsblatt 3, Aufgaben 2 und 4). Sie wurde 1964 vom Mathematiker Jan Černý aufgestellt und ist bis heute ein offenes Problem der theoretischen Informatik.

Falls $(n-1)^2$ tatsächlich eine obere Schranke ist, kann man zeigen, dass diese *scharf* ist, indem man für jedes $n \geq 1$ einen DEA mit n Zuständen angibt, bei dem das kürzeste synchronisierende Wort genau die Länge $(n-1)^2$ hat.

Geben Sie einen DEA M mit $n = 3$ Zuständen an, sodass das kürzeste synchronisierende Wort w bezüglich M genau die Länge $(n-1)^2 = 4$ besitzt. Wie sieht dann w aus? Lässt sich diese Konstruktion für ein beliebiges n verallgemeinern?

Knobelaufgabe 5

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA. Wir nennen einen Lauf r von M auf einem Wort $w \in \Sigma^*$ *akzeptierend*, wenn er im Startzustand beginnt und in einem Endzustand endet, also wenn $r[1] = s$ und $r[|r|] \in F$ gilt.

Ist die Sprache

$$L = \left\{ r \in Q^+ \,\middle|\, r \text{ ist ein akzeptierender Lauf von } M \text{ auf ein } w \in \Sigma^* \right\}$$

über dem Alphabet Q regulär? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Für die Definition eines Laufes siehe Ergänzungsblatt 5, Vorbereitungsaufgabe 1.

Knobelaufgabe 6

Geben Sie einen regulären Ausdruck γ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ mit

$$L(\gamma) = \{w \in \Sigma^* \mid z_2(w) \equiv 0 \mod 3\}$$

und $|\gamma|_0, |\gamma|_1 \leq 3$ an.

Hinweis: Für die Definition von $z_2(w)$ siehe Übungsblatt 3 oder Ergänzungsblatt 4.

Knobelaufgabe 7

Geben Sie einen minimalen DEA für folgende Sprachen an:

1. $L = \{w \in \{0, 1, 2\}^* \mid z_3(w) \equiv 1 \mod 5\}$:
2. $L = \{w \in \{0, 1, 2\}^* \mid z_3(w)^2 \equiv 0 \mod 6\}$

Hinweis: Für die Definition von $z_2(w)$ siehe Übungsblatt 3 oder Ergänzungsblatt 4.

Knobelaufgabe 8

Von folgenden Sprachen L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ wissen wir, dass sie nicht regulär sind:

1. $L = \left\{a^k b^l \,\middle|\, k \neq l\right\}$
2. $L = \left\{a^k b^l \,\middle|\, \mathrm{ggT}(k, l) = 1\right\}$

Kann die Nichtregularität dieser Sprachen mit dem Pumping-Lemma bewiesen werden?

Knobelaufgabe 9

Seien Σ ein Alphabet, $\cdot$ die Konkatenation von Wörtern und $\sim$ eine binäre Relation auf Σ^* mit

$$x \sim y \iff \exists u \in \Sigma^* \colon xu = uy.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $(\Sigma^*, \cdot)$?

Knobelaufgabe 10

Zeigen Sie: $(\mathbb{R}, \circ)$ mit $x \circ y := 2x + 2y + xy + 2$ ist ein Monoid, aber keine Gruppe.

Knobelaufgabe 11

Betrachten Sie die Definition eines PDA mit Endzuständen aus Ergänzungsblatt 10.

1. Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#)$ ein PDA. Geben Sie einen PDA mit Endzuständen M' mit $N(M') = N(M)$ an.
2. Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \#, F)$ ein PDA mit Endzuständen. Geben Sie einen PDA M' mit $N(M') = N(M)$ an.

Sie brauchen die Korrektheit Ihrer Konstruktionen nicht zu beweisen.

Knobelaufgabe 12

Sei L eine Sprache über einem Alphabet Σ. Zeigen Sie: L wird genau dann von einem DPDA durch leeren Keller akzeptiert, wenn sie von einem DPDA durch Endzustand akzeptiert wird und für alle $u \in L$ gilt: es gibt kein $v \in \Sigma^+$ mit $uv \in L$.

Knobelaufgabe 13

Entwerfen Sie für jede der folgenden Sprachen jeweils eine Turingmaschine M, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

1. $L = \left\{a^k \,\middle|\, k \text{ ist eine Zweierpotenz}\right\}$
2. $L = \left\{a^k \,\middle|\, k \text{ ist eine Quadratzahl}\right\}$

Knobelaufgabe 14

Geben Sie eine DTM M mit höchstens $m + 2$ Zustände an, die die Sprache L aus Ergänzungsblatt 12, Präsenzaufgabe 4 akzeptiert.