Ergänzung zu Theoretische Informatik I

Beweismethoden

Carlos Camino

www.fmi.uni-stuttgart.de/ti/teaching/w18/eti1

Wintersemester 2018

Beweisen von Aussagen

Wie geht man bei jedem Aussagentyp üblicherweise vor?

Aussage	Vorgehensweise
$\neg P$	Negiere P und zeige danach die Negation.
$P \implies Q$	Direkt: Nimm P an und zeige danach Q.
	Über Widerspruch: Nimm P und $\neg Q$ an und zeige einen Widerspruch.
	Kontraposition: Nimm $\neg Q$ an und zeige danach $\neg P$.
$P \iff Q$	Zeige zuerst $P \implies Q$ und danach $Q \implies P$.
$P \wedge Q$	Zeige zuerst P und danach Q.
$P \vee Q$	Zeige $\neg P \implies Q$ oder $\neg Q \implies P$.
$\forall x\colon P(x)$	Führe beliebiges x ein und zeige danach $P(x)$.
$\exists x\colon P(x)$	Führe konkretes x ein und zeige danach $P(x)$.

Abkürzungen:

- $\forall x \in M\colon P(x)$ steht für $\forall x\colon (x \in M \implies P(x))$.
- $\exists x \in M\colon P(x)$ steht für $\exists x\colon (x \in M \wedge P(x))$.

Negieren von Aussagen

Wie negiert man Aussagen?

Aussage	Negation
$\neg P$	P
$P \implies Q$	$P \wedge \neg Q.$
$P \iff Q$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
$P \wedge Q$	$\neg P \vee \neg Q$
$P \vee Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
$\forall x\colon P(x)$	$\exists x\colon \neg P(x)$
$\exists x\colon P(x)$	$\forall x\colon \neg P(x)$

Die Abkürzungen aus der vorherigen Folie sind kompatibel mit diesen Regeln:

- Die Negation von $\forall x \in M\colon P(x)$ ist $\exists x \in M\colon \neg P(x)$
- Die Negation von $\exists x \in M\colon P(x)$ ist $\forall x \in M\colon \neg P(x)$

Vollständige Induktion

Man verwendet vollständige Induktion, wenn die zu beweisende Aussage von der Form

$$\forall n \in \mathbb{N}_k \colon P(n)$$

ist. Für jedes unäre Prädikat P und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt nämlich:

$$\forall n \in \mathbb{N}_k \colon P(n) \iff (\underbrace{P(k)}_{\text{IA}} \wedge \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}_k \colon (\overbrace{P(n)}^{\text{IV}} \implies P(n+1))}_{\text{IS}}).$$

Erinnerung: $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, k+3, \ldots\}$.

Vollständige Induktion

Abkürzungen:

IA: *Induktionsanfang*

IS: *Induktionsschritt*

IV: *Induktionsvoraussetzung*

Die Induktionsvoraussetzung wird manchmal auch *Induktionsannahme* genannt.

Unter

`www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf`

findet man viele Aufgaben zur vollständigen Induktion mit Lösungen.

Starke Induktion

Für jedes unäre Prädikat P und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt auch:

$$\forall n \in \mathbb{N}_k \colon P(n) \iff (\underbrace{P(k)}_{\text{IA}} \land \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}_k \colon ((\overbrace{P(k) \land \ldots \land P(n))}^{\text{IV}} \implies P(n+1))}_{\text{IS}}).$$

Beim Induktionsschritt wird also nicht nur $P(n)$ angenommen, sondern $P(m)$ für alle $k \leq m \leq n$.

Obwohl die starke Induktion äquivalent zur vollständigen Induktion ist, ist sie oft angenehmer zu verwenden, weil man im Induktionsschritt mehrere Annahmen zur Wahl hat.