Ergänzungsblatt 15

Vorbereitungsaufgaben

Keine Vorbereitungsaufgaben.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Für Alphabete Σ und Γ nennen wir $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ einen *Homomorphismus*, wenn gilt:

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \forall x, y \in \Sigma^*\colon \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Dann gilt $\varphi(a_1 \dots a_n) = \varphi(a_1) \dots \varphi(a_n)$ für alle $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$.

1. Seien Σ und Γ zwei Alphabete und $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus. Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige reguläre Sprachen $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$?

   (a) $\varphi(A)$ ist regulär.
   (b) $\varphi^{-1}(B)$ ist regulär.
   (c) $B \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(B))$.
   (d) $\varphi(\varphi^{-1}(B)) \subseteq B$.
   (e) $A \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(A))$.
   (f) $\varphi^{-1}(\varphi(A)) \subseteq A$.

2. Für ein $m \geq 1$ sei $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ ein m-elementiges Alphabet und L die Sprache

   $$L = \left\{ a_1^n a_2^{n^2} a_3^{n^3} \dots a_m^{n^m} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

   über Σ. Zeigen Sie, dass L genau dann regulär ist, wenn $m = 1$ gilt.

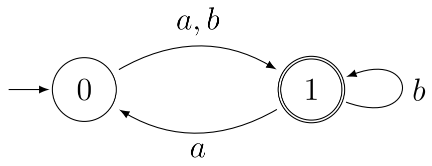
3. Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie, dass

   $$L' = \{ucv \mid uv \in L\}$$

   über dem Alphabet $\Sigma' = \{a, b, c\}$ ebenfalls regulär ist.

Präsenzaufgabe 2

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und M der folgende DEA über Σ:



Mit L bezeichnen wir die von M akzeptierte Sprache. Wie üblich seien R_L die Myhill-Nerode Relation und $\equiv_L$ die syntaktische Kongruenz bezüglich L.

1. Geben Sie eine möglichst einfache Mengendarstellung für L an.
2. Geben Sie für jede Klasse in
   (a) Σ^*/R_L
   (b) $\Sigma^*/{\equiv_L}$

   den längen-lexikographisch kleinsten Vertreter an.
3. Geben Sie die Verknüpfungstafel von $\mathrm{Synt}(L)$ an.
4. Ist $\mathrm{Synt}(L)$ kommutativ?
5. Ist $\mathrm{Synt}(L)$ eine Gruppe?

Präsenzaufgabe 3

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b = \min\{|w|_a, |w|_c\}\}$$

nicht kontextfrei ist.

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Sei $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik mit folgenden Produktionen:

$$\begin{aligned} S &\to A \mid ba \\ A &\to BA \mid a \\ B &\to BA \mid b. \end{aligned}$$

Geben Sie eine zu G äquivalente Grammatik G' in Greibach-Normalform an.

Zusatzaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Für Wörter $v, w \in \Sigma^*$ sei $|w|_v$ die Anzahl an Vorkommnissen von v in w (z. B. $|aabaaa|_{aa} = 3$ und $|ababa|_{aba} = 2$). Welche der folgenden Sprachen sind regulär und welche nicht?

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
2. $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{ab} = |w|_{ba}\}$
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{aba} = |w|_{bab}\}$

Beweisen Sie Ihre Antworten, ohne das Pumping-Lemma oder den Satz von Myhill-Nerode zu verwenden.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Zusatzaufgabe 3

Lösen Sie die komplette Modulprüfung aus Sommersemester 2018.