Ergänzungsblatt 8

Hinweis:

Um zu zeigen, dass eine gegebene Sprache in einer bestimmen Sprachklasse liegt, ist es in der Regel ausreichend, eine konkrete Repräsentation (Grammatik, Automat, o. Ä.) anzugeben, wenn ein Korrektheitsbeweis nicht explizit gefordert wird.

Bei kontextfreien Grammatiken reicht es aus, dass jede Produktion eine einzige Variable als linke Seite besitzt, da solche Grammatiken sehr leicht so modifiziert werden können, dass sie die ε-Sonderregel einhalten.

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Üben Sie das Schema zur Herstellung einer Grammatik in CNF anhand der Beispiele auf den Vorlesungsfolien 20.2 bis 20.6.

Vorbereitungsaufgabe 2

Seien $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ und $\Gamma = \{a, b\}$ zwei Alphabete und $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus mit $\varphi(a) = ab$, $\varphi(b) = ba$, $\varphi(c) = aba$ und $\varphi(d) = a$.

1. Bestimmen Sie $\varphi(\{\varepsilon, b, aa, cb, adb\})$.
2. Bestimmen Sie $\varphi^{-1}(\{\varepsilon, bb, aba, ababa\})$.

Erinnerung: Für eine Funktion $f\colon A \to B$ und Mengen $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ ist

- $f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}$ das *Bild* von A' unter f und
- $f^{-1}(B') = \{a \mid f(a) \in B'\} = \bigcup_{b\in B'} f^{-1}(b)$ das *Urbild* von B' unter f.

Man beachte, dass $f(A')$ unf $f^{-1}(B')$ beides Mengen sind. Es gilt: $f(A') \subseteq B$ unf $f^{-1}(B') \subseteq A$. Auch $f^{-1}(b)$ ist für jedes $b \in B$ eine Menge: $f^{-1}(b) = \{a \mid f(a) = b\}$.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $L = \left\{a^k b^l \,\middle|\, k < l\right\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$
2. $L = \left\{a^k b^l c^m \,\middle|\, k < l < m\right\}$ über $\Sigma = \{a, b, c\}$
3. $L = \left\{a^k b^l c^m \,\middle|\, k + l = m\right\}$ über $\Sigma = \{a, b, c\}$
4. $L = \left\{a^{kl} \,\middle|\, k, l \geq 2\right\}$ über $\Sigma = \{a\}$

Präsenzaufgabe 2

Seien Σ ein Alphabet und L eine reguläre Sprache über Σ. Zeigen Sie, dass folgende Sprachen auch regulär sind.

1. $L_1 = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in L\colon x \text{ ist Infix von } y\}$
2. $L_2 = \{y \in \Sigma^* \mid \exists x \in L\colon x \text{ ist Infix von } y\}$

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $L = \left\{a^k b^l c^k d^l \,\middle|\, k, l \in \mathbb{N}\right\}$ über $\Sigma = \{a, b, c, d\}$
2. $L = \left\{a^k b^l c^m d^n \,\middle|\, k + m = l + n\right\}$ über $\Sigma = \{a, b, c, d\}$
3. $L = \left\{a^{kl} \,\middle|\, k, l \in \mathbb{N}\right\}$ über $\Sigma = \{a\}$

Zusatzaufgabe 2

Sei $G = (\{A_1, A_2, A_3\}, \{a, b, c\}, P, A_1)$ eine kontextfreie Grammatik mit Produktionen

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_2 a \mid b \\ A_2 &\to A_3 A_3 \\ A_3 &\to A_1 c, \end{aligned}$$

bei der wir die Variablen der Einfachheit halber schon von A_1 bis A_3 durchnummeriert haben.

Wandeln Sie G in eine Grammatik G' in Greibach-Normalform um.