Ergänzungsblatt 7

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Wiederholen Sie die Begriffe aus Übungsblatt 0, Abschnitt 4.

1. Welche der Paare $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, -)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{N}, \max)$, $(\mathbb{N}, \min)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ und $(\{a, b\}^*, \cdot)$ sind Magmen/Halbgruppen/Monoide/Gruppen? Welche davon sind kommutativ?
2. Sei $(S, \circ)$ eine endliche Halbgruppe mit $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ als Trägermenge und der rechtsstehenden Verknüpfungstafel für $\circ$.
   (a) Ist $(S, \circ)$ ein Monoid?
   (b) Ist $(S, \circ)$ eine Gruppe?
   (c) Ist $(S, \circ)$ kommutativ?
   Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	d	e	f	a	b	c
b	f	d	e	b	c	a
c	e	f	d	c	a	b
d	a	b	c	d	e	f
e	c	a	b	e	f	d
f	b	c	a	f	d	e

Vorbereitungsaufgabe 2

Seien $(M, \circ)$ und $(N, \bullet)$ zwei Monoide mit neutralen Elementen 1_M und 1_N. Eine Funktion $\varphi\colon M \to N$ heißt *Monoid-Homomorphismus*, wenn gilt:

$$\varphi(1_M) = 1_N \qquad \text{und} \qquad \forall x, y \in M\colon \varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y).$$

Wenn klar ist, dass es sich bei $(M, \circ)$ und $(N, \bullet)$ um Monoide handelt, nennen wir φ auch einfach *Homomorphismus*.

1. Geben Sie einen Homomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ an.
2. Geben Sie einen Homomorphismus zwischen $(\{a, b\}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{N}, +)$ an.
3. Seien $(A, \cdot_A)$, $(B, \cdot_B)$ und $(C, \cdot_C)$ drei Monoide und $\varphi\colon A \to B$ und $\psi\colon B \to C$ zwei Homomorphismen. Zeigen Sie, dass die Funktion $\chi\colon A \to C$ mit $\chi(x) = \psi(\varphi(x))$ wieder ein Homomorphismus ist.

   Bemerkung: Man schreibt dann $\chi = \psi \circ \varphi$ („ψ nach φ“) und nennt χ die *Komposition* von φ und ψ.

Vorbereitungsaufgabe 3

Eine Äquivalenzrelation $\sim$ heißt *Kongruenzrelation* auf ein Monoid $(S, \circ)$, wenn gilt:

$$\forall x, x', y, y' \in S\colon (x \sim x' \wedge y \sim y') \implies x \circ y \sim x' \circ y'.$$

Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $(S, \circ)$, dann ist $\bullet$ mit

$$[x]_\sim \bullet [y]_\sim = [x \circ y]_\sim$$

eine wohldefinierte Verknüpfung, die zusammen mit $S/{\sim}$ ein Monoid bildet, das sogenannte *Quotientenmonoid* $(S/{\sim}, \bullet)$. Wohldefiniert heißt in diesem Fall, dass das Ergebnis der Verknüpfung $[x]_\sim \bullet [y]_\sim$ nicht von der konkreten Wahl der Repräsentanten x und y abhängt.

Sei $\sim$ eine Relation auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y$ genau dann, wenn $x^2 = y^2$.

1. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist.
3. Zeigen Sie, dass $\sim$ keine Kongruenzrelation auf $(\mathbb{Z}, +)$ ist.

Bemerkungen:

- Oft verwendet man dasselbe Symbol für $\circ$ und $\bullet$, obwohl das formal zwei verschiedene Verknüpfungen sind.
- Kongruenzrelationen können auch für Magmen, Halbgruppen und Gruppen definiert werden. Die entstehende Struktur $(S/{\sim}, \bullet)$ wird dann entsprechend *Quotientenmagma*, *-halbgruppe* oder *-gruppe* genannt.

Vorbereitungsaufgabe 4

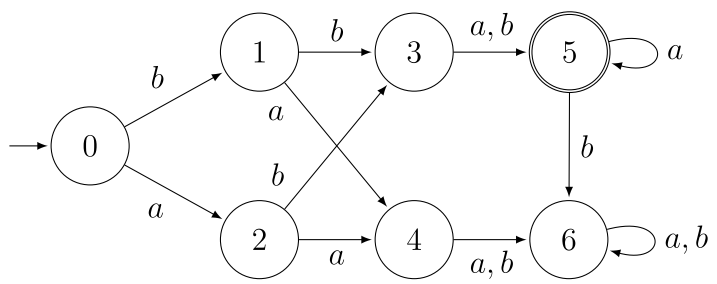
Beantworten Sie folgende Fragen:

1. Welche Charakterisierungen von regulären Sprachen kennen wir?
2. Unter welchen Operationen ist die Klasse der regulären Sprachen abgeschlossen?

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Sei M der folgende DEA:



1. Führen Sie den in Einheit 16 vorgestellten Minimierungsalgorithmus durch.

   Anstatt nicht äquivalente Zustände (bezüglich der Myhill-Nerode-Äquivalenz R_L) zu markieren, soll ein Zeuge eingetragen werden, der die Inäquivalenz der Zustände belegt.

   Formal ist ein Wort $w \in \Sigma^*$ ein Zeuge für die Inäquivalenz von p und q, falls gilt:

   $$\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \notin F.$$

   Tragen Sie in jedes Feld einen Zeugen minimaler Länge ein oder schreiben Sie „R_L", falls die Zustände äquivalent sind.

2. Wie sieht der resultierende minimale DEA aus?

3. Geben Sie einen regulären Audruck γ mit $L(\gamma) = T(M)$ an.

Präsenzaufgabe 2

Seien $(\Sigma^*, \cdot)$ das freie Monoid über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit der Konkatenation von Wörtern als Verknüpfung und $(M, \cdot)$ ein Monoid mit der Trägermenge $M = \{-1, 0, 1\}$ und der gewöhnlichen Multiplikation auf Zahlen als Verknüpfung.

Wir betrachten den Homomorphismus $\varphi\colon \Sigma^* \to M$, der durch $\varphi(a) = -1$, $\varphi(b) = 0$ und $\varphi(c) = 1$ eindeutig definiert ist.

1. Geben Sie die Verknüpfungstafel von $(M, \cdot)$ an. Warum ist $(M, \cdot)$ ein Monoid? Ist $(M, \cdot)$ eine Gruppe?

2. Geben Sie eine Formel für $\varphi(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$ an.

3. Welche Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ werden von $(M, \cdot)$ mit φ erkannt?

Präsenzaufgabe 3

Seien R_L die Myhill-Nerode-Äquivalenz und $\equiv_L$ die syntaktische Kongruenz. Bekanntlich sind R_L und $\equiv_L$ Äquivalenzrelationen.

1. Zeigen Sie, dass R_L im Allgemeinen keine Kongruenzrelation auf $(\Sigma^*, \cdot)$ ist.

2. Zeigen Sie, dass $\equiv_L$ eine Kongruenzrelation auf $(\Sigma^*, \cdot)$ ist.

3. Warum ist die auf Folie 16.7 definierte Funktion $\varphi\colon \Sigma^* \to \mathrm{Synt}(L)$ mit $\varphi(w) = [w]_{\equiv_L}$ ein Monoid-Homomorphismus?

4. Seien nun $L = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ und $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie Quotientenmenge und Index von $\equiv_L$ sowie die Verknüpfungstafel von $(\mathrm{Synt}(L), \cdot)$ an. Warum wird L von $\mathrm{Synt}(L)$ erkannt?

Erinnerung: $\mathrm{Synt}(L) = \Sigma^*/{\equiv_L}$.

Präsenzaufgabe 4

Sei L eine reguläre Sprache über einem Alphabet Σ. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L' = \{w \mid ww \in L\}$$

auch regulär ist.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Vereinigung endlich vieler regulärer Sprachen wieder regulär ist und dass für jeden DEA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ die Sprache

$$L_{p,q} = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \hat{\delta}(p, w) = q \right\}$$

für alle $p, q \in Q$ regulär ist.

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Aus Ergänzung 6 wissen wir, dass die Kongruenzrelation modulo n eine Äquivalenzrelation ist. Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass die Kongruenzrelation modulo n sowohl auf $(\mathbb{Z}, +)$ als auch auf $(\mathbb{Z}, \cdot)$ eine Kongruenzrelation ist.

Zusatzaufgabe 2

Seien $(\Sigma^*, \cdot)$ das freie Monoid über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit der Konkatenation von Wörtern als Verknüpfung und $(M, \min)$ ein Monoid mit der Trägermenge $M = \{1, 2, 3\}$ und der Minimum-Operation

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq y \\ y & \text{sonst} \end{cases}$$

als Verknüpfung.

Wir betrachten den Homomorphismus $\varphi \colon \Sigma^* \to M$, der durch $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 2$ und $\varphi(c) = 3$ eindeutig definiert ist.

1. Geben Sie die Verknüpfungstafel von $(M, \min)$ an. Warum ist $(M, \min)$ ein Monoid? Ist $(M, \min)$ eine Gruppe?
2. Geben Sie eine Formel für $\varphi(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$ an.
3. Welche Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ werden von $(M, \min)$ mit φ erkannt?

Zusatzaufgabe 3

Seien Σ und Γ zwei Alphabete, $\varphi\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus, A eine Sprache über Σ und B eine Sprache über Γ. Aus den Übungsblättern kennen wir folgende Abschlusseigenschaften:

$$A \text{ regulär} \implies \varphi(A) \text{ regulär} \qquad \text{und} \qquad B \text{ regulär} \implies \varphi^{-1}(B) \text{ regulär.}$$

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrungen:

1. $\varphi(A)$ regulär $\implies$ A regulär
2. $\varphi^{-1}(B)$ regulär $\implies$ B regulär

Zusatzaufgabe 4

Zeigen Sie, dass jede endliche Sprache regulär ist.

Zusatzaufgabe 5

Zeigen Sie mithilfe der Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen, dass folgende Sprachen nicht regulär sind.

1. $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
2. $L_2 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$

Verwenden Sie insbesondere weder das Pumping-Lemma noch den Satz von Myhill-Nerode. Sie dürfen jedoch verwenden, dass $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ nicht regulär ist.