Ergänzungsblatt 6

Erinnerung:

Die Besprechungstermine für die Ergänzungen 7 bis 10 fallen bis auf Weiteres aus. Aufgaben, Lösungen und Videos mit Erklärungen werden wie gewohnt über die Ergänzungswebseite zur Verfügung gestellt.

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Das Pumping-Lemma besagt, dass jede reguläre Sprache L über einem Alphabet Σ eine gewisse Eigenschaft $P(L)$ besitzt. Intuitiv besagt $P(L)$, dass jedes Wort aus L, das lang genug ist, sich innerhalb von L beliebig auf- und abpumpen lässt.

Formal hat $P(L)$ die Form:

$$\square\, n \in \mathbb{N}\colon \square\, x \in L, |x| \geq n\colon \square\, u, v, w \in \Sigma^*, x = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n\colon \square\, i \in \mathbb{N}\colon \boxed{}.$$

1. Füllen Sie die leeren Felder so aus, dass die entstehende Aussage äquivalent zur
   (a) Eigenschaft $P(L)$ ist.
   (b) Negation $\neg P(L)$ der Eigenschaft $P(L)$ ist.
2. Kann man etwas über die Regularität einer Sprache L sagen, wenn $P(L)$
   (a) erfüllt ist?
   (b) nicht erfüllt ist?

Vorbereitungsaufgabe 2

Eine binäre Relation $\sim$ auf einer Menge S heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie (1) *reflexiv*, (2) *symmetrisch* und (3) *transitiv* ist, d. h.:

(1) $\forall x \in S\colon x \sim x$

(2) $\forall x, y \in S\colon (x \sim y \implies y \sim x)$

(3) $\forall x, y, z \in S\colon ((x \sim y \land y \sim z) \implies x \sim z)$

Seien Σ ein Alphabet und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

1. Zeigen Sie, dass folgende Relationen $\sim$ Äquivalenzrelationen sind.

(a) $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y \iff x \equiv y \mod n$.

(b) $\sim$ auf Σ^* mit $x \sim y \iff |x| = |y|$.

2. Zeigen Sie, dass folgende Relationen $\sim$ keine Äquivalenzrelationen sind.

   (a) $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \colon y = kx$.

   (b) $\sim$ auf Σ^* mit $x \sim y \iff \exists u, v \in \Sigma^* \colon y = uxv$.

   Bemerkung: Es geht hier um (a) die Teilbarkeitsrelation und (b) die Infix-Relation.

Vorbereitungsaufgabe 3

Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf S und x ein beliebiges Element aus S, dann heißt $[x]_\sim := \{y \in S \mid x \sim y\}$ die *Äquivalenzklasse* von x bezüglich $\sim$. Für beliebige $x, y \in S$ gilt dann:

$$x \sim y \iff [x]_\sim = [y]_\sim.$$

Die Menge $S/{\sim} := \{[x]_\sim \mid x \in S\}$ aller Äquivalenzklassen heißt *Quotientenmenge* oder *Faktormenge* und bildet eine *Partition* von S, d. h. jedes Element aus S ist in genau einer Äquivalenzklasse enthalten. Die Mächtigkeit $|S/{\sim}|$ der Quotientenmenge wird *Index* von $\sim$ genannt und gelegentlich mit Index($\sim$) notiert.

Bestimmen Sie Quotientenmenge und Index der folgenden Äquivalenzrelationen:

1. $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y \iff x \equiv y \mod 3$
2. $\sim$ auf $\{a, b\}^*$ mit $x \sim y \iff |x| = |y|$

Vorbereitungsaufgabe 4

Seien Σ ein Alphabet, L eine Sprache über Σ und $x, y \in \Sigma^*$ zwei beliebige Wörter. Füllen Sie die leeren Kästchen so aus, dass die entstehende Aussage wahr ist.

1. $x \, R_L \, y \iff \boxed{} w \in \Sigma^* \colon \left(\boxed{} \iff \boxed{} \right)$
2. $x \, \not{R}_L \, y \iff \boxed{} w \in \Sigma^* \colon \left(\left(\boxed{} \wedge \boxed{} \right) \vee \left(\boxed{} \wedge \boxed{} \right) \right)$

Hinweis: $x \, \not{R}_L \, y$ besagt, dass x und y nicht in Relation bezüglich R_L stehen.

Vorbereitungsaufgabe 5

Für Äquivalenzrelationen $\sim, \sim'$ auf einer Menge S heißt $\sim'$ *Verfeinerung* von $\sim$, falls:

$$\forall x, y \in S \colon (x \sim' y \implies x \sim y).$$

In diesem Fall ist jede Äquivalenzklasse bezüglich $\sim'$ vollständig in einer Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ enthalten und es gilt folglich $|S/{\sim}| \leq |S/{\sim'}|$.

Seien nun $\sim$ und $\sim'$ Äquivalenzrelationen auf $\{a, b\}^*$ mit

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff |x| = |y| \\ x \sim' y &\iff (|x|_a = |y|_a \wedge |x|_b = |y|_b). \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, das $\sim'$ eine Verfeinerung von $\sim$ ist.
2. Listen Sie alle Elemente von $[aab]_\sim$ auf.
3. Welche Äquivalenzklassen bezüglich $\sim'$ enthält $[aab]_\sim$?

Präsenzaufgaben

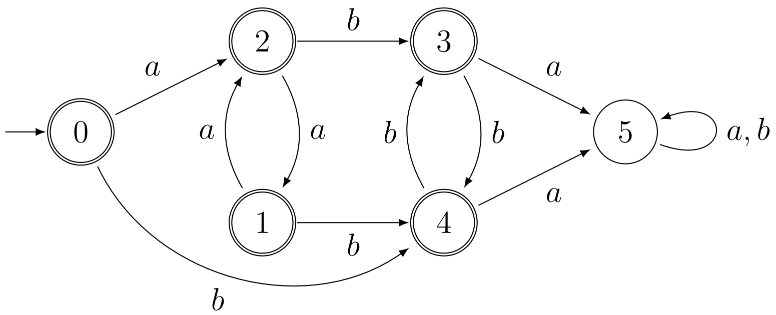
Präsenzaufgabe 1

Zeigen Sie, dass keine der folgenden Sprachen L über dem entsprechenden Alphabet Σ regulär ist. Verwenden Sie das Pumping-Lemma.

1. $L = \left\{a^k b^l a^k b^l \in \Sigma^* \,\middle|\, k, l \in \mathbb{N}\right\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$
2. $L = \left\{a^{3^m} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\right\}$ über $\Sigma = \{a\}$
3. $L = \left\{a^k b^l \,\middle|\, k < l\right\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$
4. $L = \left\{a^k b^l c^m \in \Sigma^* \,\middle|\, k + l = m\right\}$ über $\Sigma = \{a, b, c\}$

Präsenzaufgabe 2

Sei M der folgende DEA und L die von M akzeptierte Sprache.



1. Geben Sie L an.
2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

   (a) $aab\, R_L\, abb$ (c) $bab\, R_L\, aba$ (e) $\varepsilon\, R_L\, aa$

   (b) $ab\, R_L\, ba$ (d) $\varepsilon\, R_L\, bba$ (f) $bb\, R_L\, \varepsilon$

3. Geben Sie Quotientenmenge und Index der Myhill-Nerode-Relation R_L an.
4. Geben Sie den Myhill-Nerode-Automat grafisch an.
5. Geben Sie Quotientenmenge und Index der Relation R_M an.

Präsenzaufgabe 3

Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Myhill-Nerode, dass die Sprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht regulär ist.

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Welche der folgenden Relationen $\sim$ sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$ und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $x \sim y \iff \exists m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \colon x^m = y^n$
2. $x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \colon y^2 = kx$

Zusatzaufgabe 2

Bestimmen Sie Quotientenmenge und Index der Relation R_L für die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 1 \mod 3\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Zusatzaufgabe 3

Zeigen Sie erneut, dass die Sprachen aus Präsenzaufgabe 1 nicht regulär sind. Verwenden Sie diesmal den Satz von Myhill-Nerode.

Zusatzaufgabe 4

Welche der folgenden Sprachen L über dem entsprechenden Alphabet Σ sind regulär und welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $L = \left\{a^{126+257k+358l} \,\middle|\, k, l \in \mathbb{N}\right\}$ über $\Sigma = \{a\}$
2. $L = \left\{a^k b^l \,\middle|\, k > l\right\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$
3. $L = \left\{a^k b^l \,\middle|\, \mathrm{ggT}(k, l) = 1\right\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$

   Hinweis: $\mathrm{ggT}(k, l)$ ist der *größte gemeinsame Teiler* von k und l. $\mathrm{ggT}(k, l) = 1$ besagt also, dass k und l *teilerfremd* sind.

Zusatzaufgabe 5

In Präsenzaufgabe 2 von Ergänzungsblatt 5 haben wir eine kontextfreie Grammatik für die Menge $\mathrm{RE}(\Sigma)$ aller regulären Ausdrücke über einem Alphabet Σ angegeben. Zeigen Sie, dass $\mathrm{RE}(\Sigma)$ für kein Alphabet Σ regulär ist.

Hinweise:

- Da Alphabete nichtleer sind, kann von der Existenz eines Buchstaben $a \in \Sigma$ ausgegangen werden.
- $\mathrm{RE}(\Sigma)$ ist eine Sprache über dem erweiterten Alphabet $\Gamma = \Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, |, {}^*, (,)\}$.