Ergänzungsblatt 4

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Sei $M = (\{p, q, r\}, \{a, b\}, \delta, p, \{q, r\})$ ein DEA mit folgender Überführungsfunktion δ:

x	$\delta(x, a)$	$\delta(x, b)$
p	p	q
q	p	r
r	q	r

1. Bestimmen Sie $\hat{\delta}(p, ba)$ durch wiederholtes Anwenden der Definition von $\hat{\delta}$ (siehe Vorlesungsfolie 8.3).
2. Geben Sie M grafisch an.
3. Verwenden Sie die auf Vorlesungsfolien 8.6 und 8.7 beschriebene Methode, um eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = T(M)$ zu konstruieren.

Vorbereitungsaufgabe 2

Sei $G = (\{S, T, U\}, \{a, b\}, P, S)$ eine reguläre Grammatik mit Produktionen

$$S \to aT \mid b \qquad T \to bT \mid bU \qquad U \to bS \mid a \mid b.$$

Verwenden Sie die auf Vorlesungsfolien 11.5 und 11.6 beschriebene Methode, um einen NEA M mit $T(M) = L(G)$ zu konstruieren.

Geben Sie M sowohl als Tupel als auch grafisch an.

Vorbereitungsaufgabe 3

Sei $M = (\{p, q\}, \{a, b\}, \delta, \{p, q\}, \{q\})$ ein NEA mit folgender Überführungsfunktion δ:

x	$\delta(x, a)$	$\delta(x, b)$
p	$\{p, q\}$	$\{p\}$
q	$\{p\}$	$\emptyset$

1. Bestimmen Sie $\hat{\delta}(\{p\}, ab)$ durch wiederholtes Anwenden der Definition von $\hat{\delta}$ (siehe Vorlesungsfolie 9.7).
2. Geben Sie M grafisch an.
3. Geben Sie folgende Potenzmengen explizit an:

(a) $\mathcal{P}(\emptyset)$ (b) $\mathcal{P}(\{1\})$ (c) $\mathcal{P}(\{1,2\})$ (d) $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$

Erinnerung: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A, d. h.: $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. Für eine endliche Menge A besitzt $\mathcal{P}(A)$ genau $2^{|A|}$ Elemente.

4. Verwenden Sie die Potenzmengenkonstruktion aus Vorlesungsfolie 10.5, um einen DEA M' mit $T(M') = T(M)$ zu konstruieren.

   Geben Sie M' sowohl als Tupel als auch grafisch an. Beachten Sie, dass M' genau $2^2 = 4$ Zustände besitzen sollte.

Vorbereitungsaufgabe 4

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L grafisch einen möglichst einfachen NEA an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

1. $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid aba \text{ ist ein Infix von } w\}$
2. $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid aba \text{ ist ein Suffix von } w\}$
3. $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{das drittletzte Zeichen in } w \text{ ist ein } a\}$

Präsenzaufgaben

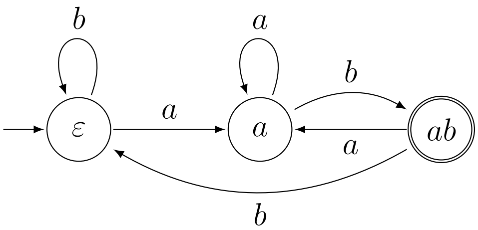
Präsenzaufgabe 1

Geben Sie grafisch einen DEA M an, der die folgende Sprache akzeptiert:

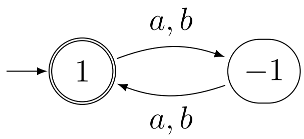
$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist gerade und } ab \text{ ist kein Suffix von } w\}\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie die DEAs

M_1:



M_2:



mit $T(M_1) = \{w \in \{a,b\}^* \mid ab \text{ ist Suffix von } w\}$ und $T(M_2) = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist gerade}\}$.

Präsenzaufgabe 2

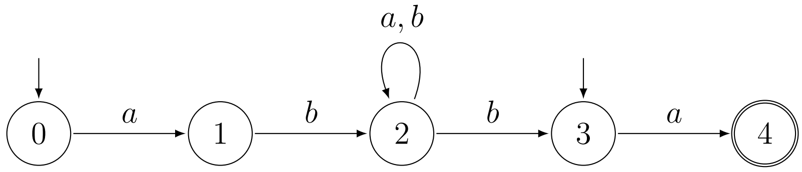
Seien Σ ein Alphabet, L eine Sprache über Σ und $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ ihr Komplement.

Zeigen Sie:

1. Wenn L regulär ist, dann ist auch $\overline{L}$ regulär.
2. Wenn L regulär ist, dann ist auch $L' = \{w \in L \mid |w| \text{ ist gerade}\}$ regulär.

Präsenzaufgabe 3

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ der folgende NEA mit Zustandsmenge $Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, Startzustandsmenge $S = \{0, 3\}$ und Endzustandsmenge $F = \{4\}$:



1. Geben Sie eine möglichst einfache Darstellung von $T(M)$ an.
2. Verwenden Sie die Potenzmengenkonstruktion, um einen DEA M' mit $T(M') = T(M)$ zu konstruieren. Geben Sie M' grafisch an. Nicht erreichbare Zustände müssen nicht gezeichnet werden.

Präsenzaufgabe 4

Betrachten Sie folgendes Kartenspiel:

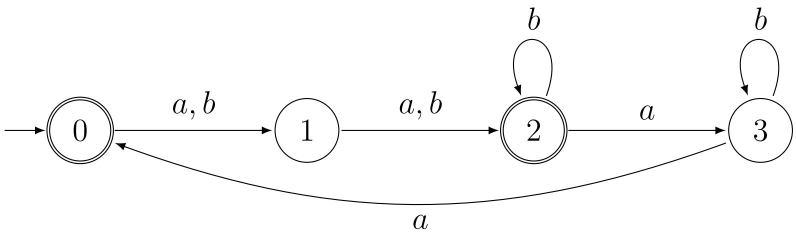
> Zuerst notieren Sie auf ein Blatt Papier eine Folge von Anweisungen. Dann legt Ihr Gegner drei Spielkarten nebeneinander auf den Tisch, jeweils auf- oder zugedeckt, und führt nacheinander die Anweisungen aus.
>
> Mögliche Anweisungen sind:
>
> a: Ihr Gegner dreht alle drei Karten um.
>
> b: Ihr Gegner dreht zwei benachbarte Karten seiner Wahl um.
>
> r: Ihr Gegner dreht die Karten an den Rändern um.
>
> Sie gewinnen das Spiel, sobald alle drei Karten aufgedeckt sind. In diesem Fall ignoriert der Gegner alle weiteren Anweisungen.

Gibt es eine Folge von Anweisungen, mit der man das Spiel mit Sicherheit gewinnt?

Überprüfen Sie Ihre Vermutung mithilfe der Automatentheorie.

Präsenzaufgabe 5

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ der folgende DEA:



Gibt es ein Wort $w \in \Sigma^*$, das die jeweilige Aussage (a) erfüllt bzw. (b) nicht erfüllt?

1. $\forall p \in Q \colon \exists q \in Q \colon \hat{\delta}(q, w) = p$

2. $\forall q \in Q\colon \exists p \in Q\colon \hat{\delta}(q, w) = p$
3. $\exists p \in Q\colon \forall q \in Q\colon \hat{\delta}(q, w) = p$
4. $\exists q \in Q\colon \forall p \in Q\colon \hat{\delta}(q, w) = p$

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Seien $b \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $b \geq 2$, $\Sigma = \{0, \ldots, b-1\}$ ein Alphabet und $z_b\colon \Sigma^* \to \mathbb{N}$ eine Funktion mit:

$$z_b(a_{n-1} \ldots a_0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \Sigma$.

Bestimmen Sie:

1. $z_2(1101)$
2. $z_2(01010)$
3. $z_2(11011)$
4. $z_3(0120)$
5. $z_3(1021)$
6. $z_4(123)$
7. $z_4(1203)$
8. $z_5(2401)$
9. $z_8(357)$
10. $z_{10}(00925)$

Bemerkungen:

- Man nennt $w \in \Sigma^*$ eine *Darstellung* der Zahl $z_b(w)$ zur Basis b.
- Beachten Sie für den Fall $n = 0$, dass die leere Konkatenation von Wörtern als ε und die leere Summe als 0 definiert sind. Somit folgt aus obiger Definition $z_b(\varepsilon) = 0$.

Zusatzaufgabe 2

Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen grafisch einen DEA mit möglichst wenigen Zuständen an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

1. $L = \{a^n b^m \mid n \equiv m \mod 5\}$
2. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid abc \text{ ist ein Faktor von } w\text{, aber } bb \text{ nicht}\}$

Hinweise:

- Das sind genau die Sprachen aus den Bonusaufgaben 6 und 8 auf Übungsblatt 3.
- Die Begriffe *Faktor* und *Infix* sind synonym.