Ergänzungsblatt 3

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Zeigen oder widerlegen Sie: Für eine beliebige Sprache L gilt $(L^2)^* = (L^*)^2$.

Vorbereitungsaufgabe 2

Seien $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ-2-Grammatik und $w \in \Sigma^*$ ein Wort. Eine Ableitung

$$S \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G w$$

heißt *Linksableitung* (bzw. *Rechtsableitung*), falls bei jedem Ableitungsschritt die am weitesten links (bzw. rechts) stehende Variable ersetzt wurde.

Wir betrachten die 4 Ableitungen auf Vorlesungsfolie 6.5.

1. Welche davon sind Linksableitungen?
2. Welche davon sind Rechtsableitungen?
3. Geben Sie zu jeder Ableitung den entsprechenden Syntaxbaum an.

Vorbereitungsaufgabe 3

Für Wörter x, y über einem Alphabet Σ definieren wir folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
x \textit{ Präfix} \text{ von } y &\iff \exists v \in \Sigma^* \colon y = xv \\
x \textit{ Suffix} \text{ von } y &\iff \exists u \in \Sigma^* \colon y = ux \\
x \textit{ Infix} \text{ von } y &\iff \exists u, v \in \Sigma^* \colon y = uxv
\end{aligned}$$

1. Für welche der folgenden Wörter x und y über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ ist x ein Präfix/Suffix/Infix von y?

   (a) $x = ab$, $y = abbc$ (c) $x = aba$, $y = ababa$ (e) $x = ab$, $y = bbac$

   (b) $x = cb$, $y = bccb$ (d) $x = bb$, $y = abbac$ (f) $x = acb$, $y = acb$

2. Listen Sie alle Präfixe, Suffixe und Infixe des Wortes $abab$ auf.
3. Wie viele Präfixe bzw. Suffixe besitzt ein Wort der Länge n?
4. Wie viele Infixe besitzt ein Wort der Länge n mindestens? Wie viele höchstens?

Hinweis: Statt *Infix* verwendet man auch die Begriffe *Faktor* und *Teilwort*.

Vorbereitungsaufgabe 4

Sei $n \in \mathbb{N}_1$ beliebig. Zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo* n (in Zeichen: $x \equiv y \mod n$), falls eine ganze Zahl k existiert mit $x = y + kn$, d. h.

$$x \equiv y \mod n \iff \exists k \in \mathbb{Z} \colon x = y + kn.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch?

1. (a) $13 \equiv 1 \mod 3$ (c) $-8 \equiv 7 \mod 5$ (e) $6 \equiv -5 \mod 1$

   (b) $11 \equiv 5 \mod 4$ (d) $-2 \equiv -9 \mod 4$ (f) $5 \equiv -7 \mod 6$

2. Geben Sie zu jeder Kongruenz die 5 kleinsten nichtnegativen Zahlen x an, die die jeweilige Kongruenz erfüllen.

   (a) $x \equiv 0 \mod 3$ (b) $x \equiv 1 \mod 3$ (c) $x \equiv 2 \mod 3$

Wichtiger Hinweis: Die Kongruenz modulo n sollte nicht mit der Modulooperation verwechselt werden. Die Kongruenz modulo n ist eine binäre Relation auf $\mathbb{Z}$ und die Modulooperation eine Funktion $\bmod \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}$ mit

$$m \bmod n = m - n \cdot \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor,$$

wobei für die *untere Gaußklammer* $\lfloor x \rfloor = \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ gilt.

Nichtsdestotrotz stehen beide Konzepte in enger Beziehung zueinander. Für $n \in \mathbb{N}_1$ und $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt nämlich:

(1) $x = y \bmod n \iff x \equiv y \mod n \land 0 \leq x < n$

(2) $x \equiv y \mod n \iff x \bmod n = y \bmod n$

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Zeigen oder widerlegen Sie:

1. Für beliebige Sprachen A und B gilt $A^* \cap B^* = (A^* \cap B^*)^*$.
2. Für beliebige Sprachen A und B gilt $A^* \cup B^* = (A^* \cup B^*)^*$.

Präsenzaufgabe 2

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, $x = ababb$ ein Wort über Σ und $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik mit Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to aTb \mid aSba \mid b \\ T &\to aT \mid bTb \mid bbSa \mid a. \end{aligned}$$

1. Verwenden Sie den Algorithmus aus der Vorlesung (Folie 5.6), um das Wortproblem für G und x zu entscheiden.
2. Im Rahmen dieser Aufgabe nennen wir eine Grammatik (V, Σ, P, S) *linear*, falls für jede Produktion $(u, v) \in P$ gilt: $u \in V$ und $v \in \Sigma^* V \Sigma^* \cup \Sigma^*$.

   Ist G linear?
3. In den Hausaufgaben sollen Sie beweisen, dass der Algorithmus aus der Vorlesung exponentielle Laufzeit haben kann. Verändern Sie ihn so, dass er das Wortproblem für lineare Grammatiken in quadratischer Zeit löst.

   Zeigen Sie die quadratische Laufzeit Ihres Algorithmus, indem Sie Konstanten $a, b, c > 0$ mit $|T| \leq an^2 + bn + c$ für $n = |x|$ finden.

Präsenzaufgabe 3

Seien $\Sigma = \{+, \cdot, x, y, z\}$ ein Alphabet und $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ eine Typ-2-Grammatik mit den Produktionen

$$S \to S + S \mid S \cdot S \mid x \mid y \mid z.$$

1. Zeigen Sie, dass G mehrdeutig ist, indem Sie zwei verschiedene Syntaxbäume für das Wort $x + y \cdot z$ angeben.
2. Geben Sie zu jedem der zwei Syntaxbäume die entsprechende Linksableitung an.
3. Bestimmen Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$.
4. Zeigen Sie, dass $L(G)$ nicht inhärent mehrdeutig ist, indem Sie eine eindeutige Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$ konstruieren. Sie müssen die Korrektheit Ihrer Konstruktion nicht beweisen.

Präsenzaufgabe 4

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L grafisch einen DEA mit möglichst wenigen Zuständen an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

Hinweis: Bis auf die Benennung der Zustände sind die Lösungen eindeutig.

1. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a \equiv 1 \mod 3\}$
2. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid aab \text{ ist Präfix von } w\} = \{aabu \mid u \in \{a, b\}^*\}$
3. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ ist gerade und } |w|_b \text{ ungerade}\}$
4. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid abba \text{ ist ein Suffix von } w\} = \{uabba \mid u \in \{a, b\}^*\}$

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Sei Σ ein Alphabet. Die Relationen Präfix, Suffix und Infix aus Vorbereitungsaufgabe 1 sind Ordnungsrelationen auf Σ^*, d. h. sie sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv. Überprüfen Sie das für die Infix-Relation und verwenden Sie dabei die Beweistechniken aus den Vorlesungseinheiten 3 und 4 und aus der zweiten Ergänzung.

1. Zeigen Sie, dass die Infix-Relation reflexiv ist, d. h.:
$$\forall x \in \Sigma^* \colon x \text{ Infix von } x.$$
2. Zeigen Sie, dass die Infix-Relation antisymmetrisch ist, d. h.:
$$\forall x, y \in \Sigma^* \colon (x \text{ Infix von } y \wedge y \text{ Infix von } x) \implies x = y.$$
3. Zeigen Sie, dass die Infix-Relation transitiv ist, d. h.:
$$\forall x, y, z \in \Sigma^* \colon (x \text{ Infix von } y \wedge y \text{ Infix von } z) \implies x \text{ Infix von } z.$$

Zusatzaufgabe 2

Verwenden Sie den veränderten Algorithmus aus Präsenzaufgabe 1, um das Wortproblem für die dort angegebene Grammatik G und das dort angegebene Wort x zu entscheiden.

Zusatzaufgabe 3

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L grafisch einen DEA mit möglichst wenigen Zuständen an, der die jeweilige Sprache akzeptiert.

Hinweis: Auch hier sind die Lösungen bis auf die Benennung der Zustände eindeutig.

1. $L = \{a, b, c\}^*$
2. $L = \{a, b\}^2 \{b\} \{a, b\}^* = \{ubv \mid u, v \in \{a, b\}^* \wedge |u| = 2\}$
3. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid abab \text{ ist ein Infix von } w\} = \{uababv \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$
4. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid aabb \text{ ist kein Infix von } w\}$
5. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = 2 \wedge |w|_b = 1\}$
6. $L = \{a^m b^n \mid m \equiv 2 \mod 3 \wedge n \equiv 0 \mod 2\}$
7. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid ab \text{ ist ein Präfix und } ba \text{ ein Suffix von } w\}$
8. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a \geq 1 \vee |w|_b \geq 2 \vee |w|_c \geq 3\}$

Zusatzaufgabe 4

Sei G die Grammatik aus Präsenzaufgabe 3. Geben Sie einen DEA mit möglichst wenigen Zuständen an, der $L(G)$ akzeptiert.