Ergänzungsblatt 2

Hinweise:

- In der Literatur sind zwei verschiedene Definitionen der natürlichen Zahlen gängig. Während in der Mathematik-I-Vorlesung $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ festgelegt wird, verwenden wir in *Theoretische Informatik I* die Bezeichnung $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Um Verwechslungen zu vermeiden, kann man die Notationen $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$ und $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N}_1$ einführen.
- Für Sprachen A, B und $n \in \mathbb{N}$ gilt:
  (a) $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  (b) $A^n = \{w_1 \ldots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in A\}$ bzw.
  $$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{für } n = 0 \\ A^{n-1}A & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$
  (c) $A^+ = \{w \mid \exists n \geq 1\colon w \in A^n\} = \bigcup_{n\geq 1} A^n$
  (d) $A^* = \{w \mid \exists n \geq 0\colon w \in A^n\} = \bigcup_{n\geq 0} A^n = \{\varepsilon\} \cup A^+$
- $|w|_x$ bezeichnet die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens x im Wort w. Es gilt beispielsweise: $|abbacb|_b = 3$.

Vorbereitungsaufgaben

Vorbereitungsaufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen gilt für eine beliebige Sprache L? Begründen Sie die Korrektheit der Aussage oder geben Sie eine Sprache L an, die sie widerlegt.

1. $L^+ \subseteq L^*$
2. $\forall k \geq 1\colon L^k \subseteq L^+$
3. $\forall k \geq 0\colon L^k \subseteq L^*$
4. $(L^2)^* = (L^*)^2$
5. $\varepsilon \in L^*$
6. $L^+ = L^* \setminus \{\varepsilon\}$

Vorbereitungsaufgabe 2

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit Variablenmenge $V = \{S, A, B, C\}$, Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ und Regelmenge

$$P = \{(S, aSBC), (S, aBC), (CB, BC), (aB, ab), (bB, bb), (bC, bc), (cC, cc)\}.$$

Diese 7 Produktionen lassen sich auch wie folgt darstellen:

$$S \to aSBC \mid aBC \qquad CB \to BC \qquad aB \to ab \qquad bB \to bb \qquad bC \to bc \qquad cC \to cc$$

1. Wörter aus $(V \cup \Sigma)^*$ heißen *Satzformen*. Für Satzformen x und y gilt: In G lässt sich y genau dann in einem Schritt von x ableiten (in Zeichen $x \Rightarrow_G y$), wenn gilt:

   $$\exists u, v, w_1, w_2 \in (V \cup \Sigma)^* \colon (x = w_1 u w_2 \land y = w_1 v w_2 \land (u, v) \in P).$$

   Beispiele:

   - Für $u = CB$, $v = BC$, $w_1 = Sa$ und $w_2 = b$ erhält man $SaCBb \Rightarrow_G SaBCb$.
   - Es gilt $aSc \not\Rightarrow_G abc$, da keine entsprechende u, v, w_1, w_2 existieren. Dafür müsste eine Regel $(u, v) \in P$ existieren, so dass S in u und b in v vorkommt.

   Geben Sie Satzformen u, v, w_1, w_2 an, die die Korrektheit der folgenden Aussagen begründen:

   (a) $CBA \Rightarrow_G BCA$

   (b) $aBc \Rightarrow_G abc$

   (c) $abC \Rightarrow_G abc$

2. In G lässt sich y genau dann in n Schritten von x ableiten (in Zeichen $x \Rightarrow_G^n y$), wenn gilt:

   $$\exists w_1, \ldots, w_{n-1} \in (V \cup \Sigma)^* \colon x \Rightarrow_G w_1 \Rightarrow_G w_2 \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G w_{n-1} \Rightarrow_G y.$$

   Beispiel: Es gilt $aCB \Rightarrow_G aBC \Rightarrow_G abC \Rightarrow_G abc$, also $aCB \Rightarrow_G^3 abc$.

   Geben Sie Ableitungsketten an, die die Korrektheit der folgenden Aussagen begründen:

   (a) $S \Rightarrow_G^3 aaaBCBCBC$

   (b) $BCBCBC \Rightarrow_G^3 BBBCCC$

   (c) $aBBBCCC \Rightarrow_G^6 abbbccc$

3. In G lässt sich y genau dann von x ableiten (in Zeichen $x \Rightarrow_G^* y$), wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x \Rightarrow_G^n y$.

   Zeigen Sie: $aabbcc \in L(G)$.

4. Von welchen Chomsky-Typen ist G?

Vorbereitungsaufgabe 3

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Von welchem Chomsky-Typ sind folgende Grammatiken und welche Sprachen über Σ erzeugen sie?

1. $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen $S \to aSb \mid ab$.
2. $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen $S \to aS \mid bS \mid a \mid b$.
3. $G = (\{S, T\}, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen $S \to TS \mid Ta$ und $TT \to aT$.

Vorbereitungsaufgabe 4

Geben Sie eine Typ-3-Grammatik G mit $L(G) = \{a^m b^n \mid m, n \geq 1\}$ an.

Präsenzaufgaben

Präsenzaufgabe 1

Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B und C über einem Alphabet Σ:

1. $A \subseteq B \implies A^* \subseteq B^*$
2. $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$
3. $A^* A^* = A^*$
4. $(A^*)^* = A^*$

Präsenzaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen L über Σ eine Grammatik G mit $L = L(G)$ an.

1. $L = \{a^m b^n \mid m < n\}$
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ ist gerade}\}$
3. $L = \left\{a^k b^l a^m \,\middle|\, k = l \vee l = m\right\}$

Präsenzaufgabe 3

Sei $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik mit $\Sigma = \{a, b\}$ und Produktionen

$$S \to aSb \mid bSa \mid SS \mid \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ die von G erzeugte Sprache ist.

Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 1

Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B und C:

1. $A^+ \subseteq A \iff A^2 \subseteq A$
2. $AB = BC \implies A^*B = BC^*$

Zusatzaufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen L über Σ eine Grammatik G mit $L = L(G)$ an.

1. $L = \{a^m b^m a^n b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommen zwei } b\text{s nebeneinander vor}\}$
3. $L = \{a^m b^n a^n b^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$