



## Ergänzungsblatt 1

*Hinweise:*

- Alle Informationen und Materialien zur Veranstaltung befinden sich auf  
`www.fmi.uni-stuttgart.de/ti/teaching/w18/eti1`.
- Die in dieser Ergänzung behandelten Themen beziehen sich auf die Abschnitte 1.1, 1.2 und 1.3 der Vorlesung *Mathematik 1 für inf, swt, msv*. Das Vorlesungskript ist unter  
`info.mathematik.uni-stuttgart.de/Mathe1InfWS1819/skr/Skript.pdf`  
zu finden.
- In der Literatur sind zwei verschiedene Definitionen der natürlichen Zahlen gängig. Während in der Mathematik-I-Vorlesung  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  festgelegt wird, verwenden wir in *Theoretische Informatik I* die Bezeichnung  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Um Verwechslungen zu vermeiden, kann man die Notationen  $\mathbb{N}_k = \{k, k + 1, k + 2, \dots\}$  und  $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N}_1$  einführen.

---

### Vorbereitungsaufgaben

---

Keine Vorbereitungsaufgaben.

---

### Präsenzaufgaben

---

#### Präsenzaufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

- |                                      |   |  |
|--------------------------------------|---|--|
| 1. $1 \subseteq \{1, 2, 3\}$         | 5. $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$                       | 9. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$        |
| 2. $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3\}$ | 6. $\{1\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}\}$                 | 10. $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ |
| 3. $\{1, 3\} \in \{1, 2, 3\}$        | 7. $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$       | 11. $\emptyset \in \{1, 2, 3\}$                            |
| 4. $\{\{1\}, \{2\}\} = \{1, 2\}$     | 8. $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ | 12. $\emptyset \in \{\emptyset, 1, \{1, 2\}, \{\{2\}\}\}$  |

## Präsenzaufgabe 2

Geben Sie die Kardinalitäten der folgenden Mengen an.

1.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2.  $B = \{1, 3, 2, 3, 2, 3\}$
3.  $C = \{\{1, 2, 3\}\}$
4.  $D = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$
5.  $E = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

## Präsenzaufgabe 3

Geben Sie eine Mengendarstellung für folgende Mengen an.

1. Die Menge  $A = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$  aller Quadratzahlen.
2. Die Menge  $B = \{0, \dots, 100\}$  aller natürlichen Zahlen zwischen 0 und 100.
3. Die Menge  $C = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$  aller Zweierpotenzen.
4. Die Menge  $D = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$  aller ungeraden Zahlen.
5. Die Menge  $\mathbb{Q}$  aller rationalen Zahlen, d. h. die Menge aller Brüche.
6. Die Menge  $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$  aller Primzahlen.

## Präsenzaufgabe 4

Geben Sie folgende Mengen als Auflistung aller Elemente an.

1.  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n < 6\}$
2.  $B = \{n + 5 \mid n \in \{0, 1, 2, 3\}\}$
3.  $C = \{|n - 4| \mid n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 7\}$
4.  $D = \{2n \mid n \in \{1, 2, 3, 4\}\}$
5.  $E = \{n \mid 2n \in \{1, 2, 3, 4\}\}$

## Präsenzaufgabe 5

Für beliebige Mengen  $A$  und  $B$  gilt:

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ , z. B.  $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ .
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ , z. B.  $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$ .
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ , z. B.  $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$ .
- $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ , z. B.

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

- $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$ , z. B.

$$\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

Sind  $A$  und  $B$  zudem Sprachen (d. h. Mengen von Wörtern), dann gilt:

- $A \cdot B = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$ , z. B.  $\{a, ab\} \cdot \{b, cc\} = \{ab, acc, abb, abcc\}$ .
- $A^n = \{w_1 \dots w_n \mid w_1, \dots, w_n \in A\}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , z. B.

$$\{a, b\}^3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}.$$

- $A^+ = \{w \mid \text{es gibt ein } n \geq 1 \text{ mit } w \in A^n\}$
- $A^* = \{w \mid \text{es gibt ein } n \geq 0 \text{ mit } w \in A^n\}$

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$  ein Alphabet und  $A, B, C \subseteq \Sigma^*$  die Sprachen  $A = \{\varepsilon, bb\}$ ,  $B = \{a, aa\}$  und  $C = \{b, ab\}$  über  $\Sigma$ . Geben Sie eine möglichst einfache Mengendarstellung folgender Mengen an. Welche Kardinalitäten haben sie? Welche davon sind Sprachen?

1.  $B \cdot C$
2.  $B \times C$
3.  $(A \cdot C) \cap (B \cdot C)$
4.  $(A \cap B) \cdot C$

## Zusatzaufgaben

### Zusatzaufgabe 1

Geben Sie folgende Mengen als Auflistung aller Elemente an.

1.  $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n - 5| \leq 2\}$
2.  $B = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge a \leq b \leq a + 4\}$

### Zusatzaufgabe 2

Seien  $\Sigma = \{a, b\}$  ein Alphabet und  $n \in \mathbb{N}$  eine beliebige natürliche Zahl.

1. Sei  $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq 5\}$ . Geben Sie eine Mengendarstellung von  $L^n$  an.
2. Sei  $L_n = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = n \wedge |w|_b = 2\}$ . Bestimmen Sie  $|L_n|$  in Abhängigkeit von  $n$ .

*Hinweise:*

- $|w|$  bezeichnet die Länge des Wortes  $w$  (z. B.  $|abbab| = 5$ ).
- $|w|_x$  bezeichnet die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens  $x$  im Wort  $w$  (z. B.  $|abbab|_b = 3$ ).

### Zusatzaufgabe 3

Wie in Präsenzaufgabe 5 seien  $\Sigma = \{a, b\}$  ein Alphabet und  $A, B, C \subseteq \Sigma^*$  die Sprachen  $A = \{\varepsilon, bb\}$ ,  $B = \{a, aa\}$  und  $C = \{b, ab\}$  über  $\Sigma$ . Geben Sie eine möglichst einfache Mengendarstellung folgender Mengen an. Welche Kardinalitäten haben sie? Welche davon sind Sprachen?

- |                          |   |                           |   |
|--------------------------|---|---------------------------|---|
| 1. $A \cdot B$           | 5. $C^2 \setminus (A \cup (B \cdot A))$ | 9. $A^2$                  | 13. $A^*$                                 |
| 2. $B \cdot A$           | 6. $\mathcal{P}(B^0)$                   | 10. $(B \cap C)^+$        | 14. $C \cdot B \cdot A$                   |
| 3. $\mathcal{P}(A)$      | 7. $C^*$                                | 11. $(A \setminus A^2)^*$ | 15. $(B \cup C)^2$                        |
| 4. $(B \cap C) \times A$ | 8. $\mathcal{P}(\emptyset)$             | 12. $A \cdot B \cdot C$   | 16. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ |